Hoofdstuk 6

Inleiding tot de wisselstroomtheorie

Doelstellingen

1. Kenmerkende grootheden gebruikt in wisselstroomtheorie kennen
2. Weten hoe de passieve componenten R,L en C zich gedragen in AC-regime
3. Basisnetwerken RC of RL kunnen oplossen
4. Vektordiagram van RL of RC netwerk kunnen tekenen
5. De verschillende vermogens die in AC-regime bestaan kennen
6. Weten wat de arbeidsfactor is

6.1 Inleidende begrippen

6.1.1 Kenmerkende grootheden

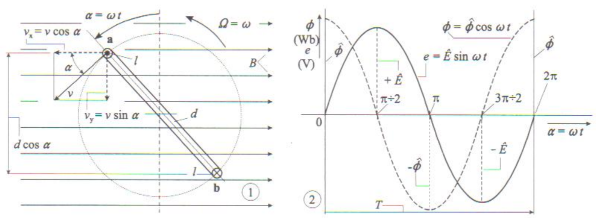
Onderstellen we een homogeen magnetisch veld waarin een lus met oppervlak S ronddraait. De magnetische flux zal hierbij een maximum BS bereiken op het ogenblik dat het vlak van de lus loodrecht staat op het magnetisch veld. Als daarentegen de lus een hoek α maakt ten opzichte van deze ideale positie, dan wordt de flux gegeven door $\Phi = BS\cos\alpha$. Aan een omwentelingssnelheid ω wordt de hoek α gegeven door $\alpha = \omega.t$. De flux wordt dan

$$\Phi = BS\cos\omega.t$$

Volgens de wet van Lenz onstaat dan een inductiespanning

$$-n\frac{d\Phi}{dt} = nBS\omega\sin(\omega t) = Blv\sin(\omega t)$$

Deze spanning heeft dus een sinusoidaal verloop en keert na elke halve periode om van teken, met andere woorden nu we hebben te maken met een wisselspanning.



Figuur 6.1: opwekken van een wisselspanning

Een periodisch signaal,zoals in ons geval de spanning $e = E \sin \omega t$ heeft een aantal parameters die dit signaal beschrijven

1. De amplitude E is de maximale spanning die bereikt kan worden.Dit wordt ook wel de topwaarde genoemd.

2. De pulsatie ω is de hoeksnelheid van de rotor, in radialen per seconde, waarop de lus bevestigd is.De pulsatie is evenredig met de frequentie volgens $\omega = 2\pi f$.Het Europese spanningsnet heeft een frequentie van 50Hz, het Amerikaanse 60Hz.

3. De faseverschuiving of hoekverschuiving is het relatieve verschil in radialen tussen twee periodische grootheden. Gewoonlijk wordt dit weergegeven in θ

4. De periode is de tijd nodig opdat het signaal een volledige periode 2π kan doorlopen, of de tijd nodig opdat het signaal zich begint te herhalen. De periode is omgekeerd evenredig met de pulsatie.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

.

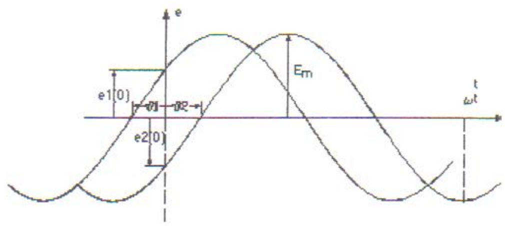
6.1.2 Waarden

Om een periodisch signaal a te kenmerken via één enkele waarde hebben we een probleem vermits de grootheid niet constant is en wisselt in de tijd.Daarom heeft men een aantal alternatieven bedacht.

Gemiddelde waarde

Een eerste is de gemiddelde waarde a_g over de periode. Men stelt

$$a_g = \frac{1}{t_1 - t_2} \int_{t_1}^{t_2} a(x)\, dx.$$



Figuur 6.2: parameters van een periodisch signaal

Soms is dit een goede benadering, maar als we dit berekenen voor een sinusfunctie over zijn periode vinden we 0.Vermits dit geen goede benadering is definieert men de gemiddelde waarde over de halve periode. Dit wordt

$$a_g = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} a(x)\,dx.$$

Effektieve waarde

Een tweede alternatief is dat men werkt met de effektieve waarde, wat meestal ook gedaan wordt.Deze wordt als volgt gedefinieerd

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^{T} a(x)^2\,dx.}$$

In het engels wordt de effektiefwaarde de RMS(Root Mean Square) waarde genoemd. Deze waarde wordt meestal gebruikt ook omdat het een enorm technisch belang in zich meedraagt.Het is de effektiefwaarde die maatgevend is voor de energieontwikkeling. [1]

toepassing: de sinusfunctie

Gemiddelde waarde: Omdat de sinusfunctie symmetrisch is wordt deze waarde dus berekend over de halve periode.

$$a_g = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} Esin(\omega t)\,dt = \frac{2E}{\pi}$$

Effektieve waarde:

$$A^2 = \frac{1}{T}\int_0^{T} E^2 sin^2(\omega t)\,dt = \frac{E^2}{2}$$

Dus $A = \frac{E}{\sqrt{2}}$

[1] De vormfactor is de verhouding tussen de effektieve en de gemiddelde waarde gedefinieerd als $\xi = \frac{A}{a_g}$

6.2 Wiskundig intermezzo

6.2.1 Differentiatie en integratie van een sinusfunctie

Stel een willekeurige sinusfunctie: $e = E\sin(\omega t + \theta)$.

De eerste afgeleide is

$$
\begin{aligned}
\frac{de}{dt} &= \frac{d(E\sin(\omega t + \theta)}{dt} \\
&= E\omega\cos(\omega t + \theta) \\
&= E\omega\sin(\omega t + \theta + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

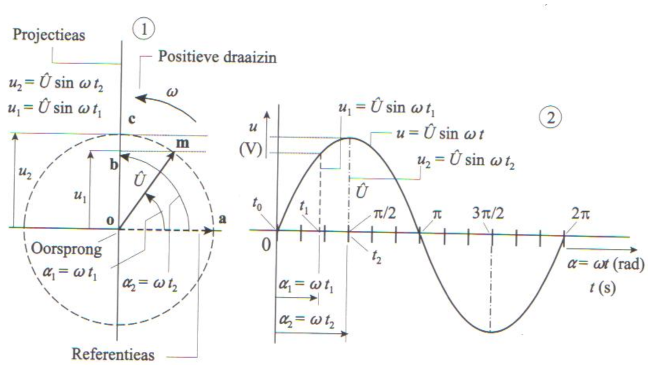
De integraal is

$$
\begin{aligned}
\int E\sin(\omega t + \theta)\,dx &= \frac{E}{\omega}(-\cos(\omega t + \theta)) \\
&= \frac{E}{\omega}(sin(\omega t + \theta - \frac{\pi}{2}))
\end{aligned}
$$

6.2.2 Vektordiagram

De ogenblikkelijke waarde van een sinusoidale grootheid kan voorgesteld worden als de projectie van een vektor op de Y-as.

- met een lengte evenredig met de amplitude ven de vektor
- ronddraaiend met de hoeksnelheid gelijk aan de pulsatie ω



Figuur 6.3: vektordiagram van een sinusfunctie

6.2.3 Complexe getallen

Als we in vorige sectie kijken naar de vektorvoorstelling kunnen we een vektor voorstellen door een deel op de X-as en een deel op de Y-as. Op de Y-as hebben we

$$a = E \sin \alpha$$

en op de X-as hebben we

$$b = E \cos \alpha$$

De vektoriële som wordt

$$\underline{\mathrm{E}} = E(\cos \alpha + j \sin \alpha)$$

Omzetting van $\underline{\mathrm{E}} = a + jb$ in effektieve waarden en faseverschuiving wordt

$$E = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{6.1}$$

$$tg\theta = \frac{b}{a} \tag{6.2}$$

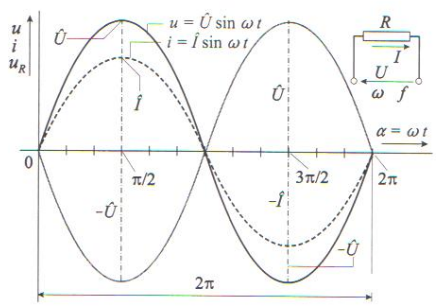
6.3 Enkelvoudige ketens

6.3.1 Zuiver resistieve keten

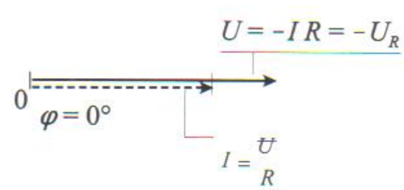
We hebben over een weerstand R een sinusoidale spanning $u = U\sin(\omega t)$ gezet. De stroom volgt uit de wet van Ohm.

$$
\begin{aligned}
i &= \frac{u}{R} \\
i &= \frac{U\sin(\omega t)}{R}
\end{aligned}
$$

De stroom is dus een sinus met dezelfde pulsatie en er is geen faseverschuiving.De evenredigheidsconstante is gewoon de waarde van de weerstand. In wisselstroomtheorie noemt men deze evenredigheidsconstante de reaktantie en wordt genoteerd $X_R = R$ voor een weerstand.



Figuur 6.4: sinusoidaal regime voor een zuivere weerstand



Figuur 6.5: vektordiagram voor een zuivere resistieve keten

6.3.2 Zuiver induktieve keten

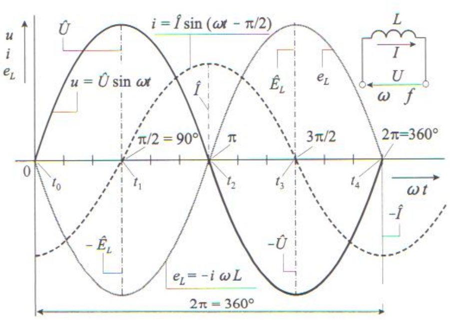
We hebben over een spoel L een sinusoidale spanning $u = U\sin(\omega t)$ gezet. De stroom volgt uit de wet van Lenz. Zoals in vorig hoofdstuk besproken is er ook hier een overgangsverschijnsel doch we gaan in dit hoofdstuk enkel rekening houden met de regimeterm, met andere woorden de keten is reeds lang genoeg gesloten.

$$e_L = u = -L\frac{di}{dt}$$

dus

$$i = \int \frac{U}{L}\sin(\omega t)\,dt = \frac{u}{L\omega}(\sin(\omega t - \frac{\pi}{2}))$$

We zien nu dat er wel een faseverschuiving is van $\frac{\pi}{2}$. Deze faseverschuiving is negatief dus *de stroom ijlt na op de spanning.*Dit is fysisch duidelijk te verstaan.De spoel tracht de fluxverandering tegen te gaan. Dus de opkomende stroom, die het veld veranderd, zal zoveel mogelijk tegengehouden worden om de flux niet te veranderen.De spoel bouwt een tegenemk op zodat de stroom als hij nul is,en de fluxverandering dus maximaal niet door de keten kan vloeien en de flux niet verandert.Omdat de flux stroom nodig heeft om te blijven bestaan in zijn oorspronkelijke staat zal ze als de stroom minimaal of maximaal wordt deze toch moeten doorlaten om de flux te behouden.Dus er staat geen tegenemk over de spoel.

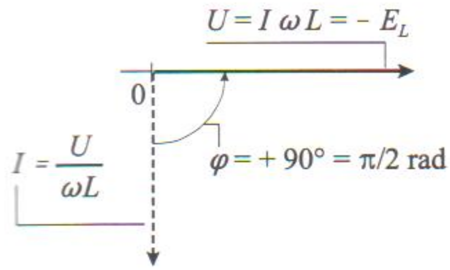


Figuur 6.6: sinusoidaal regime van een zuiver induktieve keten

Bovendien vinden we nu een ander evenredig verband tussen spanning en stroom namelijk $U = \omega LI$ Dus niet enkel de fase verschilt ook de grootte gaat met een evenredigheidsfactor ω verschillen. Dit kan men algemeen neerschrijven als

$$X_L = j\omega L$$

en deze evenredigheidsconstante noemt men de reaktantie.



Figuur 6.7: vektordiagram van en zuiver induktieve keten

6.3.3 Zuiver capacitieve keten

Over een condensator C wordt een spanning $u = U\sin(\omega t)$ gezet. De stroom volgt uit de definitie van de capaciteit $u_C = \int U\sin(\omega t)\,dt$ Ook hier treedt een overgangsverschijnsel op dat we verwaarlozen. We veronderstellen dat de keten reeds lang genoeg gesloten werd.

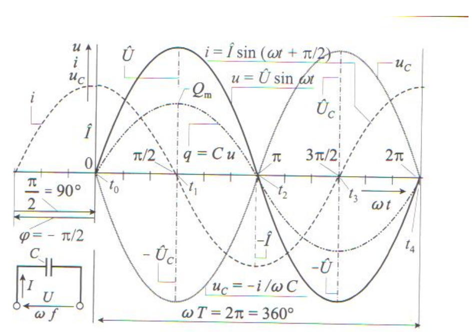
$$u_C = \frac{Q}{C} = \frac{\int i\,dt}{C}$$

dus

$$i = C\frac{du}{dt} = CU\omega\cos(\omega t)$$

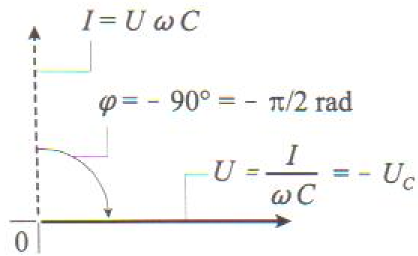
en dit kunnen we schrijven als

$$i = CU\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$



Figuur 6.8: sinusoidaal gedrag van een zuivere capacitieve keten

Nu vinden we een positieve faseverschuiving van $\frac{\pi}{2}$ en een evenredigheidscoefficient van $\frac{1}{j\omega C}$



Figuur 6.9: vektordiagram van een zuiver capacitieve keten

Met andere woorden de stroom ijlt voor op de spanning en de capacitieve reaktantie wordt voorgesteld door

$$X_C = \frac{1}{j\omega C}$$

Ook dit is fysisch te begrijpen. De condensator moet opladen en vraagt stroom om een spanning op te bouwen, dus eerst zal er stroom vloeien in de keten voor er spanning kan opgebouwd worden aan de klemmen van de condensator.

6.4 Gemengde schakelingen

Hier kan men stellen dat in wisselstroomregime eender welk element in een schakeling zich gedraagt als een weerstand. Deze weerstand is wel frequentieafhankelijk, waardoor er zich bijkomende verschijnselen kunnen voordoen maar daar gaan in een volgend hoofdstuk op in.

6.4.1 De RL keten

R en L worden in serie gezet. Dan wordt de vervangingsweerstand $X_t = X_R + X_L$

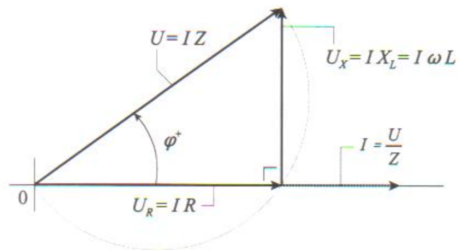
$$X_t = R + j\omega L$$

Dit stelt een complex getal voor dus zet men dit best om in een grootte en een fase met de gekende formules.

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \tag{6.3}$$

$$tg\phi = \frac{\omega L}{R} \tag{6.4}$$

In deze oplossing stelt Z de impedantie en ϕ de faseverschuiving voor.



Figuur 6.10: vektordiagram van een RL keten

oefening:

Stel een weerstand van 4Ω en een $\frac{30}{\pi}$ mH staan in serie. Bereken de stroom in de keten als er een bron geschakeld werd van 200V.

$$\begin{aligned} X_R &= 4\Omega \\ X_L &= 2\pi 50 \frac{30}{\pi} = 3\Omega \\ Z &= \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\Omega \\ \phi &= \arctan\frac{3}{4} = 36,8 graden \end{aligned}$$

Dus de stroom wordt

$$I = \frac{200}{5} A = 40A$$

met een faseverschuiving van $(0 - 36,8)$ graden dus de stroom ijlt na met 36,8 graden.

6.4.2 De RC keten

R en C worden in parallel gezet. De vervangingsweerstand wordt

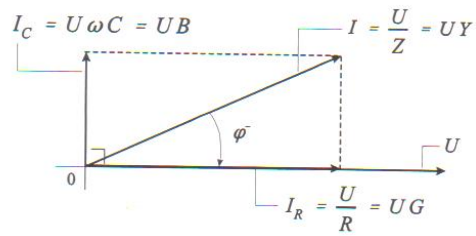
$$\frac{1}{X_t} = \frac{1}{X_R} + \frac{1}{X_C}$$

Dit wordt uitgeschreven

$$\frac{1}{X_t} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}}$$

Vermits dit weer een complex getal is zetten we alles om in modulus (grootte) en fase.

$$\frac{1}{X_t} = j\omega C + \frac{1}{R}$$



Figuur 6.11: vektordiagram van een RC parallelketen

$$
\begin{aligned}
&= \frac{j\omega CR + 1}{R} \\
X_t &= \frac{R}{1 + j\omega RC} \\
&= \frac{R(1 - j\omega RC)}{1^2 + (\omega RC)^2}
\end{aligned}
$$

De modulus en fase volgen uit de gekende formules

$$M = \sqrt{\frac{(R^2 + (\omega CR^2)^2)}{(1 + (\omega RC)^2)^2}} \quad (6.5)$$

$$\phi = \arctan(-\omega CR) \quad (6.6)$$

6.5 Vermogens in wisselstroomketens

In een DC circuit werd het vermogen gedefineerd als $P = UI$. Toen waren beide grootheden constant. Nu hebben we te maken met wisselende grootheden $u = U\sin(\omega t)$ en $i = I\sin(\omega t - \phi)$. Nu moeten we dus het produkt maken van deze beide grootheden $p = u.i$ en dit levert een heel ander resultaat op.

$$
\begin{aligned}
p &= U.I.\sin(\omega t).\sin(\omega t - \phi) \\
p &= U.I.sin(\omega t).(\sin((\omega t)\cos(\phi) - \cos(\omega t)\sin(\phi)) \\
p &= U.I.\cos(\phi).sin^2(\omega t) - U.I.sin(\phi)\cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

We zien hier twee componenten tevoorschijn komen namelijk een component in $\cos(\phi)$ en een component in $\sin(\phi)$.

De component in $\cos(\phi)$ noemt men het aktief vermogen P en de term $\cos(\phi)$ noemt men de arbeidsfactor.

Het is de arbeidsfactor die het rendement weergeeft van een circuit. Het reaktief vermogen geeft het vermogen weer dat tussen verbruiker en leverancier heen en weer slingert en brengt dus eigenlijk zuiver verlies teweeg en dient daarom maximaal vermeden te worden.

De component in $\sin(\phi)$ noemt men het reaktief vermogen Q.

Van de leveranciers op het Europese net moet een verbruiker een arbeidsfactor hebben van minstens 0.8. Ook aan boord dient men te letten op de arbeidsfactor want zoals reeds gezegd geeft dit het rendement weer van de elektrische installatie en als dit te laag ligt zal er teveel verbruik zijn van brandstof dat tot niets heeft geleid.

Er bestaat een verband tussen het reaktief en aktief vermogen namelijk het schijnbaar vermogen $S = U.I$, en het verband wordt weergegeven in volgende formule.

$$S^2 = P^2 + Q^2$$

Buiten een slecht rendement is er nog een belangrijk gevolg als men een slechte arbeidsfactor heeft namelijk om het nodige vermogen te leveren aan de verbruiker heeft men een grotere stroom I nodig. Dit heeft tot gevolg dat men

- Een groter jouleverlies heeft
- Dikkere geleiders, dus een duurdere installatie nodig heeft