Hoofdstuk 5

Overgangsverschijnselen

Doelstellingen

1. Overgangsverschijnselen van RC en RL ketens kunnen uitleggen waarbij de wiskundige afleiding van ondergeschikt belang is

Als we een condensator of een spoel in een elektrisch circuit schakelen zullen deze bij in- of uitschakelen hoge stromen of spanningen veroorzaken in dit circuit. *Na verloop van tijd* zal dit overgangsverschijnsel echter niet meer merkbaar zijn en reageren ze respectievelijk als een open keten of een kortsluiting. Het is daarom nuttig om eens te kijken wat er nu eigenlijk gebeurt in zo'n RC of RL circuit.

5.1 De RL keten

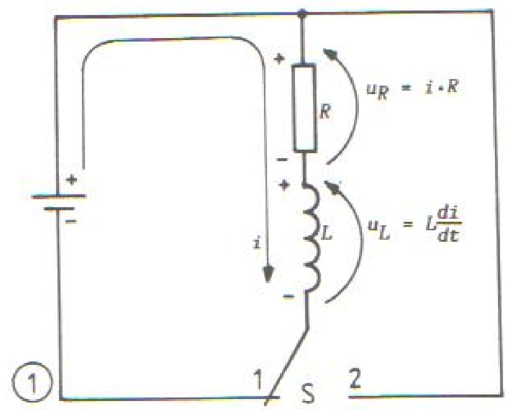
5.1.1 Inschakelen van een keten met spoel

In dit circuit zien we drie componenten namelijk een bron, een spoel en een weerstand. We passen hier de spanningswet van Kirchoff op toe, m.a.w de spanning geleverd door de bron wordt opgenomen deels door de spoel en deels door de weerstand.

$$\begin{aligned} U &= U_R + U_L \\ &= Ri + L\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijking bestaat uit twee delen namelijk

Algemene oplossing: Dit is de oplossing van de differentiaalvergelijking als de bronspanning gelijk is aan 0. Dit is de homogene oplossing of homogeen deel. Dit is een oplossing van de vorm e^{at}.



Bijzondere oplossing: Dit is de oplossing van de differentiaalvergelijking als de bronspanning verschillend is van nul en is in ons geval dus een constante spanning. Dit noemt men de particuliere oplossing of particulier deel. Dit is een oplossing van de vorm B (constante).

We veronderstellen een oplossing van de vorm

$$i = Ae^{at} + B$$

.

We vullen deze oplossing in om de onbekenden A,C en a te vinden. We bekomen de vergelijking

$$Ae^{at}(La + R) + RB = U$$

Opdat dit de oplossing zou zijn van de differentiaalvergelijking moet deze vergelijking voor alle waarden van de tijd opgaan dus moeten de verschillende coefficienten ieder op zich 0 zijn. Zo bekomen we het stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} La + R &= 0 \\ RB - U &= 0 \end{aligned}$$

Daaruit volgt $a = \frac{R}{L}$ en $B = \frac{U}{R}$. Hiermee hebben we slechts twee van de drie onbekenden. Er onbreekt nog een onbekende namelijk A. Om deze onbekende te berekenen moeten we wat men noemt een randvoorwaarde invoeren. Hiertoe stelt men dat in een spoel de stroom niet onmiddellijk kan veranderen. De spoel tracht de flux zo constant mogelijk te houden, m.a.w. de verandering van flux wordt tegengewerkt.Wiskundig geformuleerd stelt men i(t=0)=0. Zo verkrijgt men bijkomende vergelijking

$$i = 0 = Ae^0 + \frac{U}{R}$$

waaruit volgt

$$A = -\frac{U}{R}$$

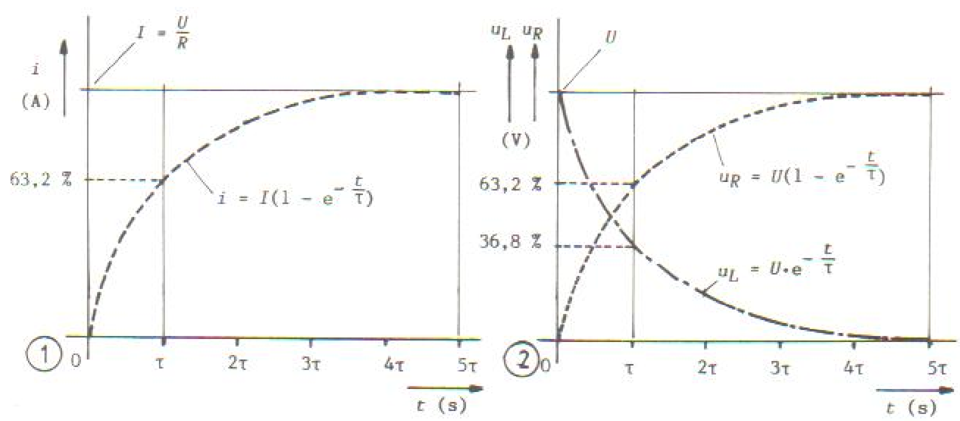
Door de gevonden constanten in te vullen krijgt men de vergelijkingen voor stroom en spanning. Voor de stroom krijgt men

$$i = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

en voor de spanning over de spoel

$$U_L = Ue^{-\frac{R}{L}t}$$

Onderstaande grafiek geeft weer wat er in de tijd gebeurt bij inschakelen van een RL keten. We zien duidelijk dat na verloop van tijd er geen spanning meer



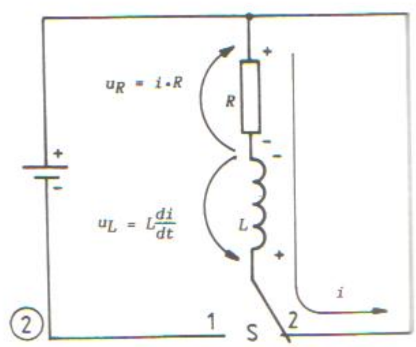
staat over de spoel en dat de volledige spanning over de weerstand staat. In het begin echter staat de volle spanning over de spoel. Er dient op gewezen te worden dat de modellering zoals hierboven werd opgesteld niet helemaal correct is. De zelfinductiecoefficient L is eigenlijk geen constante en eigenlijk is zij functie van de stroom, wat de oplossing van de differentiaalvergelijking bemoeilijkt. In dit geval zou het een niet-lineaire vergelijking worden die met klassieke analytische methodes niet op te lossen is. Dit moet dan numeriek gebeuren met bijvoorbeeld de methode van Runge Kutta.

De factor $\frac{R}{L}$ noemt men de tijdsconstante van het systeem, en geeft weer hoe snel, of hoe traag, dit systeem reageert.

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

5.1.2 Uitschakelen van een keten met spoel

Onderstaande figuur geeft het schema van het uitschakelen van een RL keten.In realiteit is de methode om de schakelaar rechtstreeks te openen niet correct. Men gaat door de hele kleine schakeltijd enorm hoge spanningen creeren aan de schakelaar die soms groot genoeg zijn om doorslag te veroorzaken aan de klemmen.Dit moet ten alle tijde vermeden worden en men gaat daarom parallel over de bron en tussen schakelaar en spoel een zogenaamde vrijloopdiode plaatsen om de spoel over de weerstand te laten ontladen en de spanningen zo te beperken.



Als we een RL keten uitschakelen krijgen we volgende differentiaalvergelijking.

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

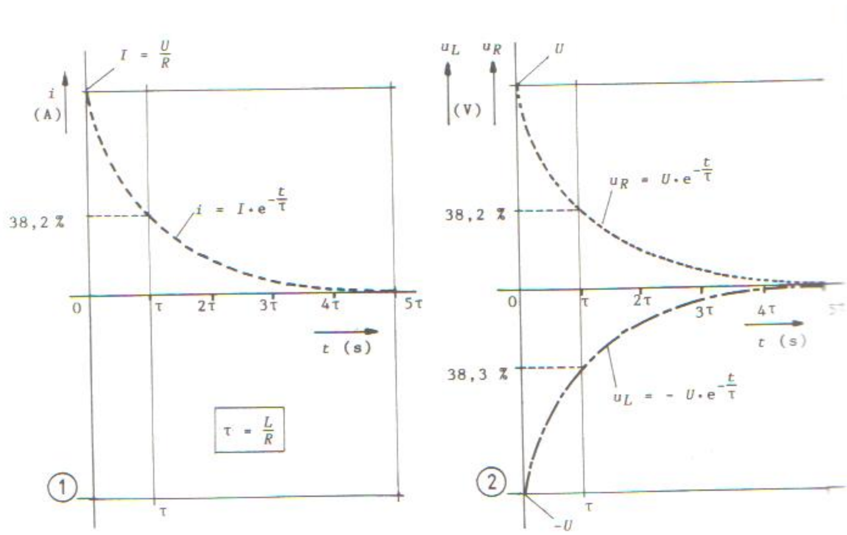
die op dezelfde manier kan worden opgelost als in vorige paragraaf.De randvoorwaarde is fysisch dezelfde namelijk de flux blijft constant op tijdstip nul, wiskundig wordt dit $i(t = 0) = \frac{U}{R}$. Makkelijker is echter de methode van de scheiding der veranderlijken toe te passen. De oplossingen worden

$$i = \frac{U}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

en

$$U_L = -Ue^{-\frac{R}{L}t}$$

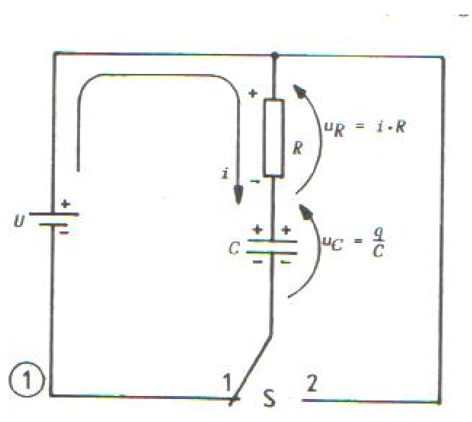
Deze vergelijkingen leveren onderstaande grafieken op.



5.2 De RC keten

5.2.1 Inschakelen van een keten met condensator

Het inschakelen van een circuit met condensator komt er fysisch op neer dat men een condensator gaat opladen. Om een RC circuit op te lossen gebruiken we dezelfde techniek als met een RL circuit.



We hebben een spanning U_C over de condensator waarvoor geldt

$$C = \frac{q}{U_C}$$

Anders gesteld is $q = c.U_C$.De ogenblikkelijke stroom is

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

Anders gezegd is de stroom evenredig met de verandering van de spanning.Dit kan nog anders gesteld worden namelijk

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

De spanningsvergelijking wordt dan

$$U = U_C + U_R$$

Als we dan de spanningen in functie van de stroom invullen, wordt dit op zijn beurt

$$U = \frac{1}{C}\int i\,dt + Ri$$

Dit is een integro-differentiaalvergelijking die niet eenvoudig oplosbaar is.Daarom zullen we de zaken pragmatisch aanpakken. We nemen de eerste afgeleide naar de tijd van elke term in de vergelijking en daaruit volgt dan volgende vergelijking

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dU}{dt} = 0$$

Deze differentiaalvergelijking is eenvoudig op te lossen met de methode van de scheiding der veranderlijken.

$$\begin{aligned} \frac{di}{i} &= -\frac{1}{RC}dt \\ lni + A &= -\frac{1}{RC}t \\ lni + lnK &= -\frac{1}{RC}t \\ i &= Kexp(-\frac{t}{RC}) \end{aligned}$$

Het enige probleem dat nog overblijft is de constante K. Hiertoe hebben we opnieuw een randvoorwaarde nodig. Men stelt dat de spanning over de condensator niet kan springen dus op tijdstip nul bij het begin van de oplading is de spanning nul. In wiskundige termen $U_C(t = 0) = 0$. Dus op t=0 hebben we

$$U - U_C = Ri_0$$

Met $U_C = 0$ wordt dit $U = Ri_0$ of $i_0 = \frac{U}{R}$.Dit alles invullen in de oplossing van de differentiaalvergelijking levert op

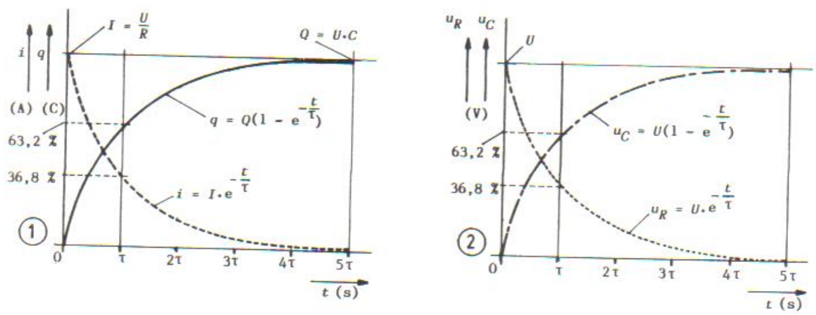
$$i_0 = Ke^0 = \frac{U}{R}$$

De oplossing voor de stroom wordt dus

$$i = \frac{U}{R} exp(-\frac{t}{RC})$$

Voor de spanning over de condensator bekomen we dan

$$U_C = U(1 - exp(-\frac{t}{RC}))$$



De term RC noemt men de tijdsconstante van de RC keten en geeft weer hoe snel de condensator opgeladen (of ontladen) wordt.

$$\tau_C = RC$$

5.2.2 Ontladen van condensator

Het ontladen van een condensator komt erop neer dat we kunnen zeggen dat we de condensator gaan gebruiken als bron, daar na opladen de condensator vol lading zit zoals een batterij na opladen. Dit geeft volgende differentiaalvergelijking

$$-U_C = Ri$$

of

$$Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

of zoals in vorige paragraaf na afleiden naar de tijd van elke component in de vergelijking

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

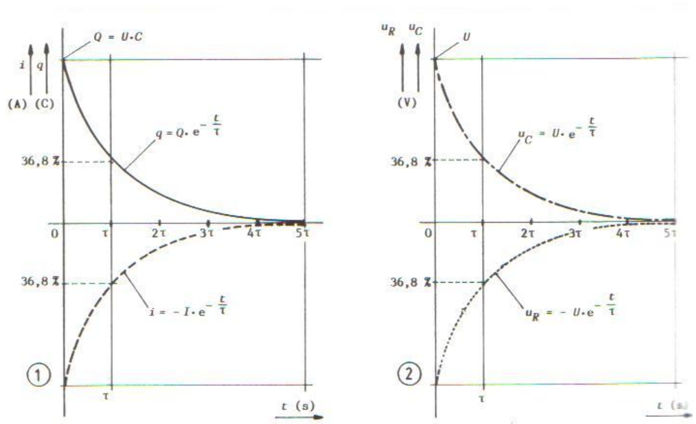
Dit is dezelfde vergelijking als het laadproces en geeft dan ook dezelfde oplossing, enkel de randvoorwaarde zal verschillen. Nu is op tijdstip $t = 0$ de condensator volgeladen en staat de volledige bronspanning over zijn klemmen, dus $U_C(t = 0) = U$. Op $t = 0$ wordt dit in termen van stroom $-U_C = Ri_0$ of $i_0 = -\frac{U}{R}$ Dit levert volgende oplossing op voor de stroom bij ontladen

$$i = -\frac{U}{R} exp(-\frac{t}{RC})$$

en voor de spanning over de condensator krijgen we dan

$$U_C = Uexp(-\frac{t}{RC})$$

Grafisch wordt dit



5.2.3 De tijdsconstante

De tijdsconstante drukt in beide gevallen hetzelfde uit namelijk de reactiessnelheid van het circuit. Als we eens kijken naar het tijdsverloop, met andere woorden hoever is de keten reeds geevolueerd in zijn overgangsverschijnsel dan stellen we vast dat voor de stroom in een RL circuit bij inschakelen we na verloop van één tijdsconstante we vinden

$$i = I(1 - exp(-\frac{\tau}{\tau}) = I(1 - exp(-1)) = I(0.63)$$

ofwel de stroom is met 63 procent toegenomen sinds het sluiten van de keten.

5.3 De RLC keten

In deze paragraaf gaan we enkele beschouwingen maken over de RLC keten. We zullen er niet te diep op ingaan en we zullen trachten de wiskunde te beperken. De differentiaalvergelijking die we nu krijgen is

$$U_L + U_C + U_R = U$$

of mooi uitgeschreven

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = U$$

Weerom hebben we integrodifferentiaalvergelijking die iets moeilijker op te lossen is maar we maken het ons gemakkelijk en we nemen de eerste afgeleide naar de tijd van elke term om een gewone tweede orde differentiaalvergelijking te bekomen

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Hierin vullen we een algemene oplossing van de vorm

$$i = Ae^{at}$$

en we krijgen dan volgende vergelijking

$$Ae^{at}(La^2 + Ra + \frac{1}{C}) = 0$$

Deze vergelijking moet gelden voor alle waarden van de tijd, dus kan enkel de vierkantsvergelijking tussen haakjes gelijk zijn aan 0.

Een vierkantsvergelijking heeft drie mogelijke oplossingen al naargelang het teken van de discriminant.De discriminant is in dit geval

$$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$$

Al naargelang het teken van de discriminant, dus de grootte van $R_c^2 = \frac{4L}{C}$ krijgen we een ander type oplossing dus zal de keten zich ook anders gedragen. [1]

- $R > R_c : \Delta > 0$:onderkritisch gedempte keten
- $R = R_c : \Delta = 0$: kritisch gedempte keten
- $R < R_c : \Delta < 0$: oscillerende keten,want er staan complexe wortels in de exponent van de exponentiële die omgezet kunnen worden tot sinus en cosinus functies

[1] In de cursus automatisatie van tweede bachelor wordt dieper ingegaan op dit probleem.

5.4 Oefening

Een elektromagneet met 1750 windingen is aangesloten op een bron van 2,40 V en neemt een stroom op van 200 mA.De kern is 10 cm lang en heeft een diameter van 2 cm. Bereken de tijdsconstante en de zelfinductiespanning die ontstaat als de stroom in een tijd van 0,01 s onderbroken wordt. De relatieve permeabiliteit is 364.