Chapitre 5

Phénomènes de transition

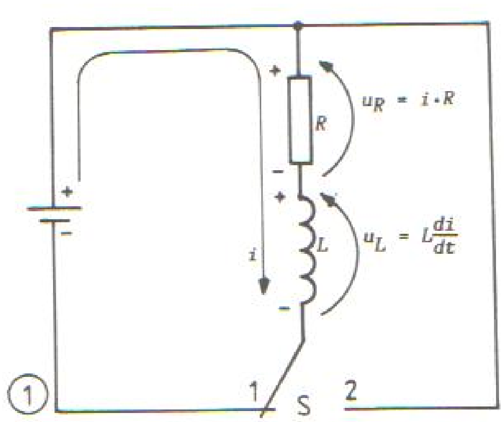
Objectifs

1. Comprendre les phénomènes de transition dans des circuits RC et RL et savoir les expliquer.(La déduction mathématique est d'une importance inférieure)

Quand nous connectons un condensateur ou une bobine dans un circuit électrique, ils introduisent des courants ou tensions trés hauts en branchant ou débrachant. *Aprés un certain temps,* cet phénomène de transition ne sera plus remarqué et va réagir respectivement comme un circuit ouvert ou un court circuit.Nous allons voir ce qui se passe dans un circuit RC ou RL.

5.1 Le circuit RL

5.1.1 Brancher un circuit avec une bobine



Dans ce circuit on voit trois composants. Une source,une bobine et une résistance.Nous appliquons la loi des tensions de Kirchhoff, donc la tension de la source est divisé entre la résistance et la bobine.

$$\begin{aligned} U &= U_R + U_L \\ &= Ri + L\frac{di}{dt} \end{aligned}$$

La solution de cette équation différentielle consiste en deux parties

Solution générale : C'est la solution de l'équation différentielle quand la tension de la source est égale à 0.Ceci nous donne la solution homogéne et cela est de la forme e^{at}.

Solution particulière : C'est la solution de l'équation différentielle quand la tension de la source est différente de zero.Dans notre cas, c'est une constante.Ceci nous donne la solution particulière de la forme B (constante).

Nous supposons une solution de forme

$$i = Ae^{at} + B$$

.

Nous remplissons cette solution pour trouver les inconnus A,C en a . Maintenant nous avons obtenu l'équation

$$Ae^{at}(La + R) + RB = U$$

Pour que de l'équation différentielle soit la solution, à chaque moment dans le temps, donc chaque coefficient doit être égale á zero.Nous obtenons le systéme d'équations suivantes

$$\begin{aligned} La + R &= 0 \\ RB - U &= 0 \end{aligned}$$

Il en résulte que $a = \frac{R}{L}$ en $B = \frac{U}{R}$. Maintenant nous avons trouvé deux des trois inconnus. Il nous manque encore un c'est á dire A. Pour calculer cet inconnu il nous faut une condition annexe. Ceci suit du fait que le courant dans une bobine ne peut pas changer directement. La bobine essaye de controler le flux d'un telle façon qu'il reste constante. Donc chaque changement de flux est contrarié.Formulé plus mathématiquement on dit i(t=0)=0. De ceci on obtient l'équation suivante

$$i = 0 = Ae^0 + \frac{U}{R}$$

donc

$$A = -\frac{U}{R}$$

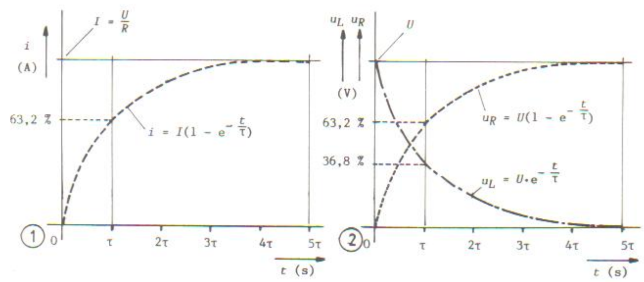
Par remplir les inconnus calculés, on obtient les équations pour le courant et la tension.Pour le courant on obtient

$$i = \frac{U}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

et pour la tension sur la bobine

$$U_L = Ue^{-\frac{R}{L}t}$$

Le graphique ci dessus nous donne une idée de ce qui se passe dans le temps quand on branche un circuit RL. Nous pouvons voir qu'aprés un certain temps



il n'y a plus de tension sur la bobine et que toute cette tension se retrouve complétement sur la résistance. Au début la tension compléte se retrouve sur la bobine.Il faut dire que le modèle ci dessus n'est pas tout á fait correct. Le coefficient de l'auto-induction L n'est pas constante et est en fait fonction du courant, ce qui rend la solution de l'équation différentielle plus difficile. Dans ce cas, l'équation différentielle deviendra non linéaire ce que l'on ne sais résoudre d'une façon analytique.Il faut utiliser des méthodes numériques comme la méthode de Runge Kutta.

Le facteur $\frac{L}{R}$ est appelé le temps propre du système, et nous dit si le systéme réagit lentement ou rapidement.

$$\tau_L = \frac{L}{R}$$

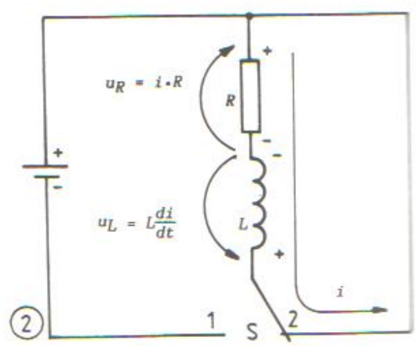
5.1.2 Débranchement d'un circuit RL

La figure ci dessous, nous donne un schéma de débranchement d'un circuit RL.En réalité la méthode d'ouverture l'interrupteur n'est pas correcte.On obtient par des temps d'inteuption trés petit des tensions énormes aux bornes de l'interrupteur, qui sont de temps en temps assez grand pour créer une décharge destructive.Il faut éviter cela donc on branche en paralléle de la source puis entre l'interrupteur et la bobine une diode de course libre pour que la bobine se décharge par la résistance ce qui limitera la tension.

Quand nous débranchons le circuit nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

Qu'on résout de la même manière que dans le dernier paragraphe.La condition annexe est au point de vue de physique tout à fait le même qu'avant, donc au



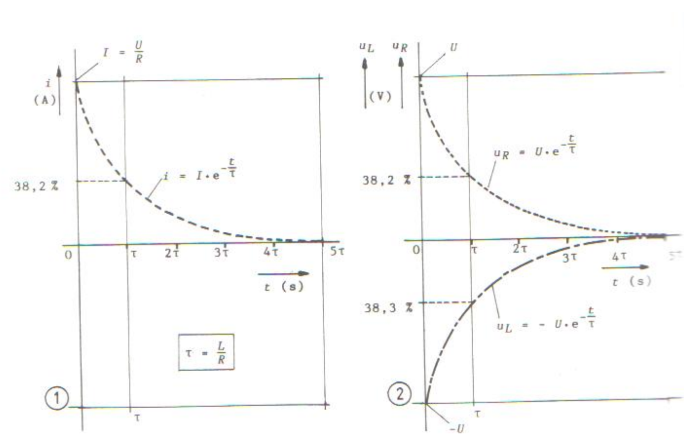
moment de débranchement le flux reste constant ; mathématiquement $i(t=0) = \frac{U}{R}$. Mais c'est plus facile d'utiliser la méthode de la séparation des variables Les solutions sont

$$i = \frac{U}{R} e^{-\frac{R}{L}t}$$

et

$$U_L = -U e^{-\frac{R}{L}t}$$

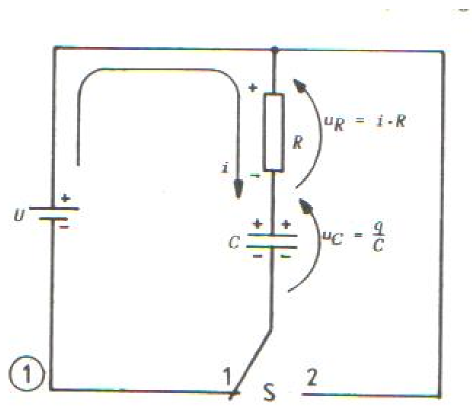
Ces solutions vous donnent les graphiques ci dessous.



5.2 Le circuit RC

5.2.1 Branchement d'un circuit RC

Le branchement d'un circuit RC n'est qu'au point de vue de la physique le chargement d'un condensateur.Pour résoudre ce probléme on utilise tout à fait la même technique qu'avec le circuit RL.



On a une tensionU_C sur le condensateur pour laquelle

$$C = \frac{q}{U_C}$$

donc $q = c.U_C$.Le courant immédiat est

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt}$$

Autrement dit le courant est proportionel au changement de la tension donc on peut dire que

$$u_C = \frac{1}{C}\int i\,dt.$$

L'équation de la tension devient

$$U = U_C + U_R$$

Si nous remplissons les tensions en fonction du courant ça devient á son tour

$$U = \frac{1}{C}\int i\,dt + Ri$$

Ceci est une équation integro-différentielle qu'on ne peut pas résoudre trés facilement.Donc nous devons changer de tactique. Nous prenons la premiére dérivative dans le temps de chaque partie dans l'équation et nous obtenons l'équation suivante

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dU}{dt} = 0$$

Cette équation différentielle est facile á résoudre avec la méthode de la séparation des variables.

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC}dt$$

$$\begin{aligned} lni + A &= -\frac{1}{RC}t \\ lni + lnK &= -\frac{1}{RC}t \\ i &= Kexp(-\frac{t}{RC}) \end{aligned}$$

Le seul probléme qui nous reste encore c'est de calculer la constante K.Nous avons de nouveau besoin d'une condition annexe. Il est évident que la tension sur un condensateur ne change pas d' moment à l'autre, donc au début du chargement $t = 0$ la tension est zero. Mis en formule $U_C(t = 0) = 0$. Donc à t=0 nous avons

$$U - U_C = Ri_0$$

Avec $U_C = 0$ ceci devient $U = Ri_0$ ou $i_0 = \frac{U}{R}$.Remplir ceci dans la solution de l'équation différentielle nous donne

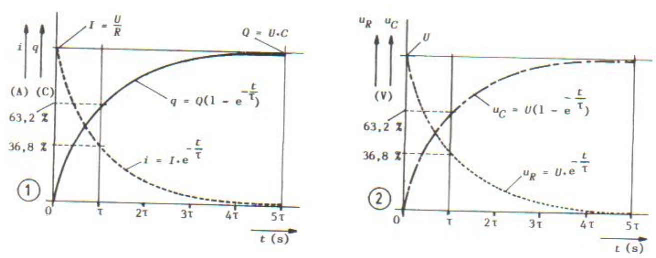
$$i_0 = Ke^0 = \frac{U}{R}$$

L'équation pour le courant devient

$$i = \frac{U}{R}exp(-\frac{t}{RC})$$

Pour la tension sur le condensateur on obtient

$$U_C = U(1 - exp(-\frac{t}{RC}))$$



La variable RC est appelée le temps propre du circuit RC et donne une idée de la vitesse de (dé)chargement.

$$\tau_C = RC$$

5.2.2 Décharge d'un condensateur

Pendant le déchargement d'un condensateur on utilise le condensateur comme une source.Aprés qu'on a chargé un condensateur il est rempli de charge comme une batterie.Ceci nous donne l'équation différentielle suivante

$$-U_C = Ri$$

ou

$$RI + \frac{1}{C}\int i\,dt = 0$$

ou comme dans le dernier paragraphe aprés avoir dérivé dans le temps chaque partie de l'équation

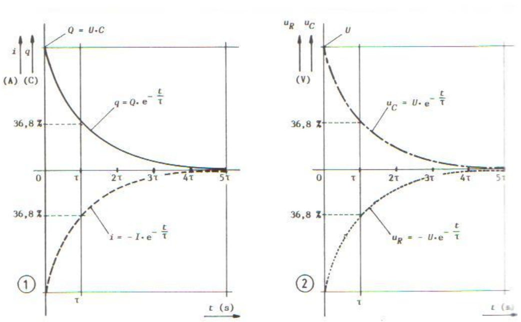
$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

C'est la même équation que pour le processus de chargement, sauf les conditions annexes vont être différent.Au temps $t = 0$ le condensateur est rempli est la tension de la source se trouve complétement sur les bornes du condensateur , donc $U_C(t = 0) = U$. A $t = 0$ ça devient au point de vue du courant $-U_C = Ri_0$ ou $i_0 = -\frac{U}{R}$ Nous obtenons la solution suivante pour le courant pendant le déchargement

$$i = -\frac{U}{R}exp(-\frac{t}{RC})$$

et pour la tension sur le condensateur nous obtenons

$$U_C = Uexp(-\frac{t}{RC})$$



5.2.3 Le temps propre

Le temps propre du circuit exprime chaque fois la même chose c'est á dire la vitesse de réaction du circuit.Autrement dit on aura une idée de l'évolution du circuit après avoir calculé le temps propre. Si nous calculons l'évolution du courant aprés une durée du temps propre d'un circuit RL (pour le RC c'est la même chose) on peut constater que

$$i = I(1 - exp(-\frac{\tau}{\tau}) = I(1 - exp(-1)) = I(0.63)$$

ou le courant est augmenté de 63 pour cent.

5.3 Le circuit RLC

Dans ce paragraphe, nous allons faire quelques considérations conçernant le circuit RLC.Nous n'allons pas faire cette étude profondément et nous allons essayer d'éviter les mathématiques. L'équation différentielle que nous obtenons maintenant est

$$U_L + U_C + U_R = U$$

ou écrite plus élégamment

$$L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int i\,dt + Ri = U$$

De nouveau nous avons une équation integro-différentielle qui est un peu plus difficile á résoudre mais nous le nous faisons plus facile et encore une fois prenons la premiére dérivative dans le temps de chaque partie de l'équation et obtenons une équation différentielle de deuxiéme ordre.

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0$$

Nous remplissons une solution générale

$$i = Ae^{at}$$

dans l'équation et obtenons l'équation suivante

$$Ae^{at}(La^2 + Ra + \frac{1}{C}) = 0$$

Cette solution doit être en vigueur pour chaque moment dans le temps, donc seulement léquation du second degré doit être égale á zero.

Une équation du second degré a trois solutions possibles. Cela dépend du signe du discriminant.Le discriminant est dans ce cas

$$\Delta = R^2 - \frac{4L}{C}$$

Tout dépend du signe du discriminant,donc de la largeur de $R_c^2 = \frac{4L}{C}$, nous obtenons une autre type de solution. Donc le circuit va se comporter differément. [1]

- $R > R_c$: $\Delta > 0$: amortissement sous-critiquement
- $R = R_c$: $\Delta = 0$: amortissement critiquement
- $R < R_c$: $\Delta < 0$: circuit oscillatoire ,parce qu'il y a des nombres complexes dans l'exposant, qu'on peut remplacer par des fonctions sinus et cosinus

5.4 Exercice

Une magnete avec 1750 spires est relié á une source de 2,40 V et prend un courant de 200 mA.La longueur de la bobine est 10 cm et le diamètre est 2 cm. Calculez le temps propre de cette circuit et la tension d'inductance si on coupe le courant en 0,01 s.La permeabilité relative est 364.

1. Dans le cours d'automatisation du deuxiéme bachelor nous allons étudier ce probléme plus profondement.