Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Toegepaste en Exacte Wetenschappen

Calcul vectoriel

Peter Bueken

HZS-OE5-NW142
Premier Bachelor Sciences Nautiques
Version 14.0
19 Septembre 2014

Table des matières

Chapitre 1

Calcul vectoriel

1. Introduction

Pour la description de certains phénomènes en, par exemple, la mécanique et la physique, les variables *scalaires*, représentées par une valeur réelle et une unité (comme, par exemple, la distance, température, pression) ne suffisent pas. En effet, il est souvent nécessaire de décrire un phénomène à l'aide d'une variable *vectorielle*, qui est déterminée par sa *taille*, une *direction* et un *sens*, et dans certains cas même un *point initial*. Quelques exemples de variables vectorielles sont la vélocité et l'accélération d'un point, la force exercée sur une masse, un déplacement exécutée par une masse.

2. Vecteurs dans le plan et dans l'espace

1. Définitions

Un *vecteur (lié)* dans le plan ou dans l'espace (de dimension trois) consiste d'une paire de points A et B dans le plan ou dans l'espace, dans un ordre prescrit. Un vecteur lié correspond donc avec un couple de points (A, B) dans l'espace considérée. Les points A et B seront appelés le point initial et le point final (ou point terminal) du vecteur, et on dénote ce vecteur par $\vec{AB}$. Pour la représentation graphique du vecteur $\vec{AB}$, on utilise une flèche du point A au point B.

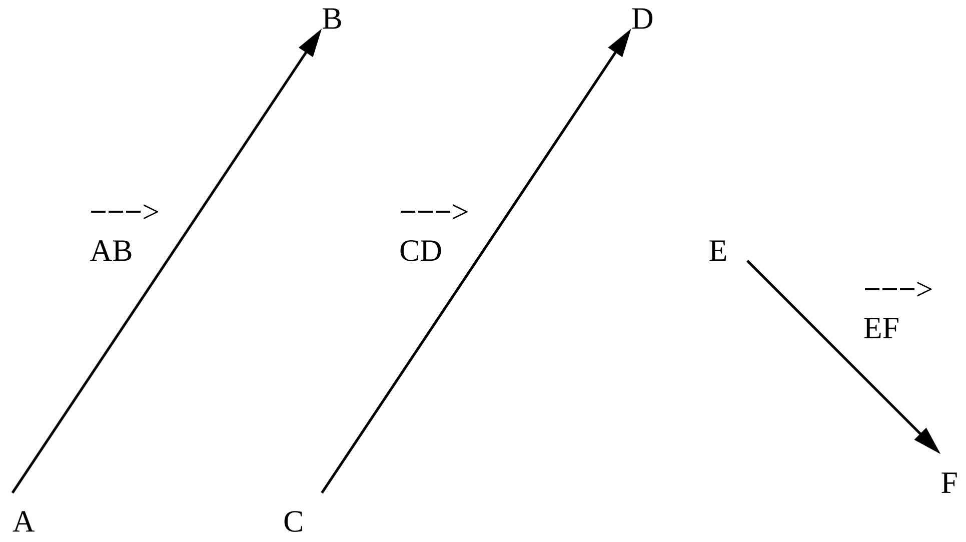

Figure 1. *Quelques vecteurs liés*

Pour un vecteur lié, le point initial et le point final jouent un rôle important. On considère deux vecteurs liés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ comme différents quand leur points initiaux ou leur point finaux sont différents, c'est-à-dire,

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow A = C \text{ et } B = D.$$

Pour certaines applications, le point initial d'un vecteur n'est pas important, et le vecteur sera seulement utilisé pour indiquer une direction, un sens, et une taille. Deux vecteurs liés avec la même taille, direction et sens, mais avec un point initial différent, seront considérés comme représentants de la même quantité vectorielle, qu'on appelle un *vecteur (libre)*. Deux vecteurs liés $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ représentent le même vecteur libre si les couples de points (A, B) et (C, D) sont "équipollents", c'est-à-dire qu'il existe une translation (déplacement) T de l'espace qui relie les points initiaux et finaux des vecteurs,

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow T(A) = C \text{ et } T(B) = D.$$

Les points A, B, C, D forment alors un parallélogramme, ou les couples de points peuvent être reliés par une paire de parallélogrammes (dans le cas de points colinéaires). Un vecteur libre correspond donc à une classe d'équivalence de couples équipollents, ou des vecteurs liés correspondants. On dénotera souvent les vecteurs libres par les symboles $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ Dans la suite de ce chapitre, on se concentrera surtout sur l'étude des vecteurs libres, qu'on appelle "vecteurs".

Le *module* ou la longueur $|\vec{AB}|$ d'un vecteur lié $\vec{AB}$ est la distance entre le point initial A et le point final B du vecteur (ou la longueur de la flèche qui forme la représentation graphique du vecteur). On appelle *module* $|\vec{v}|$ du vecteur libre $\vec{v}$ le module d'un représentant arbitraire $\vec{AB}$ de ce vecteur libre.

Un *vecteur unitaire* est un vecteur dont le module est égal à 1. Le *vecteur zéro* $\vec{0}$ est le vecteur libre qui correspond aux vecteurs liés dont les points initiaux et finaux sont les mêmes, $\vec{AA}$. Le module du vecteur zéro est évidemment égal à 0.

Le *vecteur opposé* d'un vecteur lié $\vec{AB}$ est le vecteur $\vec{BA}$. Le vecteur libre correspondant au vecteur opposé $\vec{BA}$ d'un représentant arbitraire $\vec{AB}$ du vecteur libre $\vec{v}$ est appelé le vecteur opposé de $\vec{v}$, et on le dénote par $-\vec{v}$. Le vecteur opposé $-\vec{v}$ a la même direction et taille que le vecteur $\vec{v}$, mais son sens est opposé à celui de $\vec{v}$.

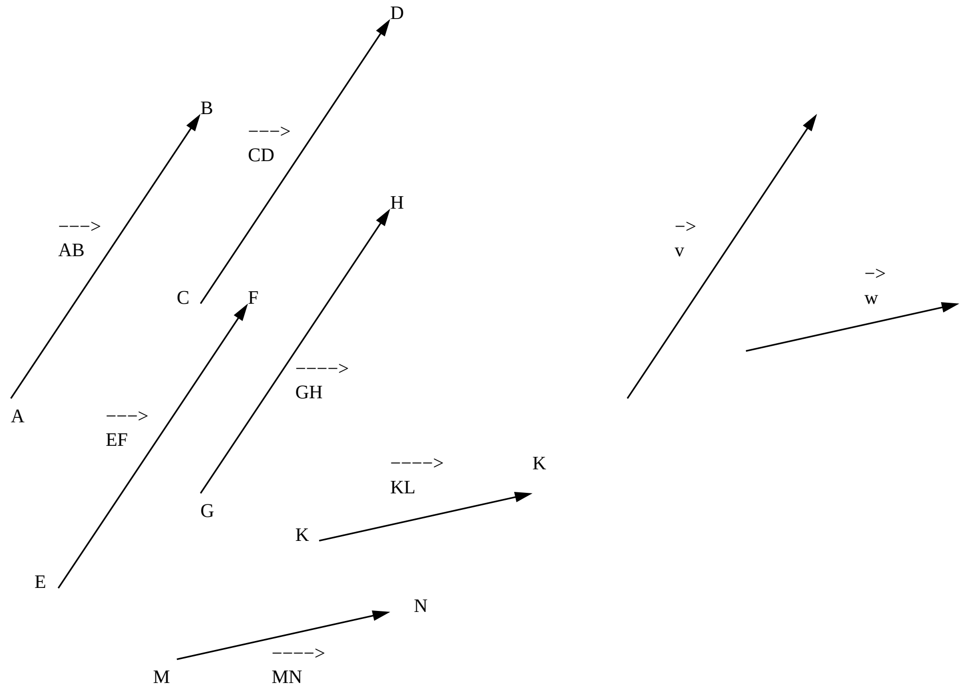

Figure 2. *Vecteurs libres avec quelques représentants*

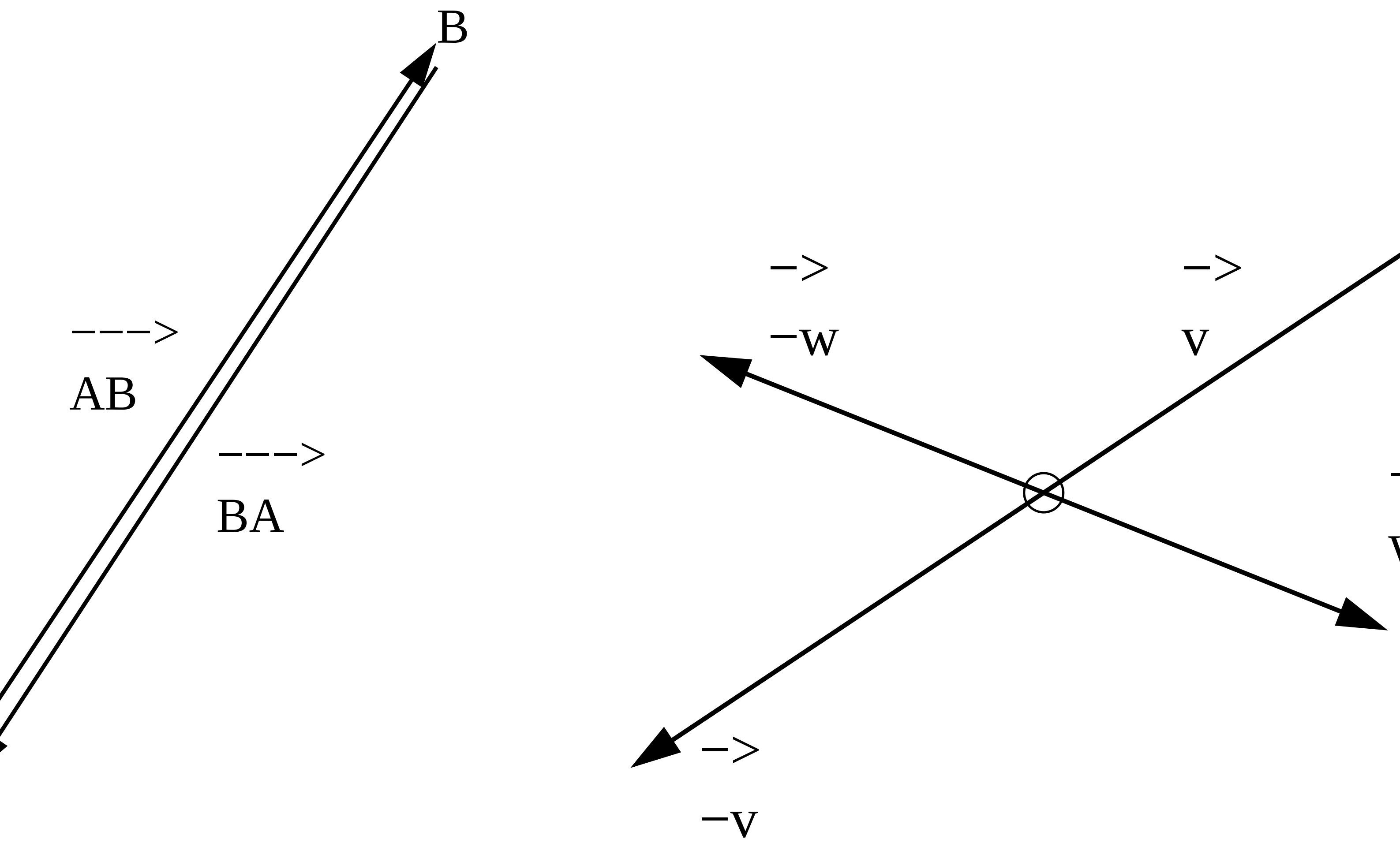

Figure 3. *Vecteurs opposés*

2. Multiple scalaire d'un vecteur

Considérons un vecteur libre $\vec{a}$ et un nombre réel k. On définit alors le *multiple scalaire* $k \cdot \vec{a}$ comme un vecteur ayant la même direction que $\vec{a}$, dont le module est donné par

$$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

Le sens de $k \cdot \vec{a}$ et $\vec{a}$ sont identiques (resp. opposés) quand k est positif (resp. négatif).

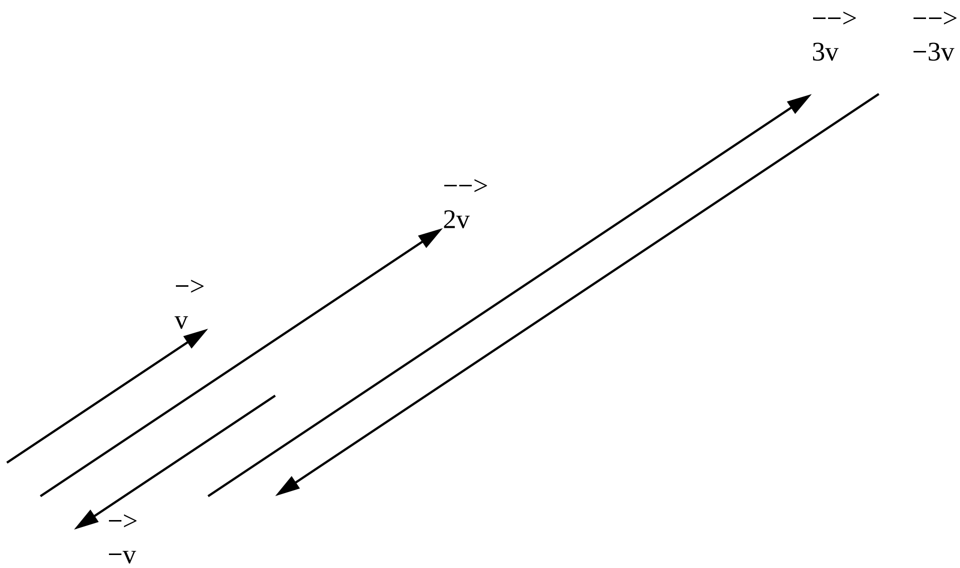

Figure 4. *Vecteur libre avec quelques multiples scalaires*

Considérons maintenant un vecteur $\vec{a}$ différent du vecteur zéro. Il est alors clair que le vecteur

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

est un vecteur unitaire dans la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{a}$. La construction d'un vecteur unitaire dans le sens et la direction d'un vecteur donné $\vec{v}$ est appelé la *normalisation* du vecteur $\vec{v}$.

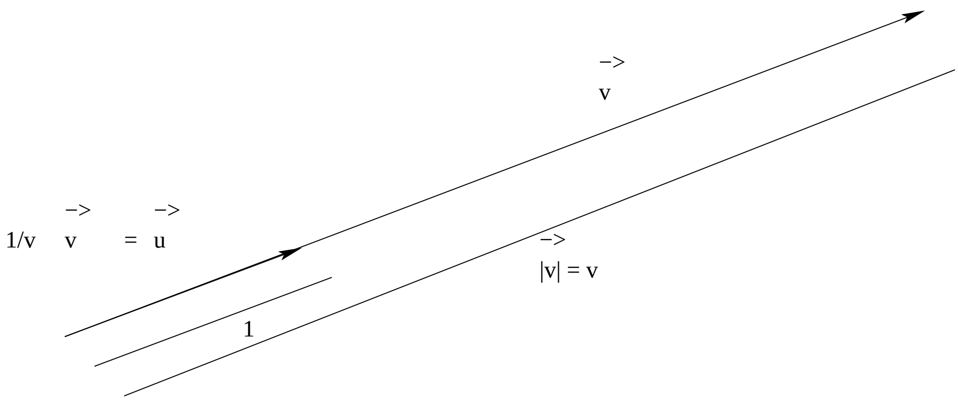

Figure 5. *Normalisation d'un vecteur libre*

3. Somme et différence de vecteurs libres

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, correspondant aux vecteurs liés $\vec{OA}$ et $\vec{AB}$. On définit alors la somme (ou la résultante) $\vec{a} + \vec{b}$ des vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$ comme le vecteur libre correspondant au vecteur lié $\vec{OB}$.

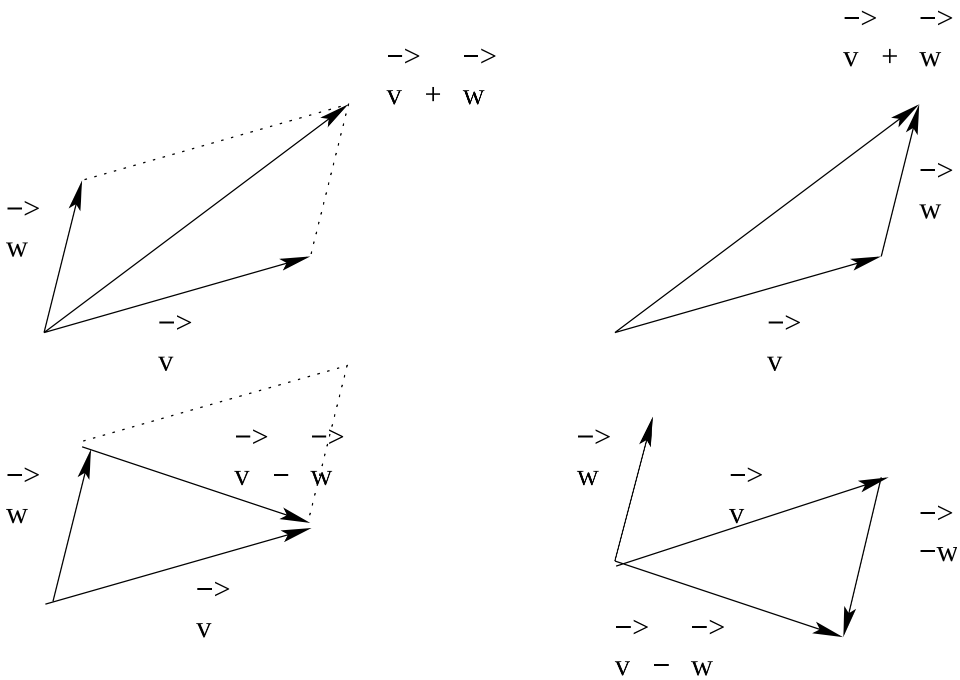

Figure 6. *Somme et différence de vecteurs libres*

Une méthode alternative pour la construction de la somme est la méthode du parallélogramme. Si A et B sont les points finaux des vecteurs liés $\vec{OA}$ et $\vec{OB}$ qui représentent les vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, la somme $\vec{a} + \vec{b}$ de ces vecteurs libres est représentée par le vecteur lié $\vec{OC}$, où C est le quatrième sommet d'un parallélogramme formé par les points O, A et B.

La différence de deux vecteurs libres$\vec{a}$ et $\vec{b}$ est définie comme une somme

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

du vecteur $\vec{a}$ et du vecteur opposé de $\vec{b}$.

4. Composantes d'un vecteur libre

En choisissant, pour un vecteur libre donné, un vecteur lié (le représentant) avec un point initial fixe O, on constate que l'ensemble des vecteurs libres correspond à l'ensemble de vecteurs liés $\vec{OV}$, correspondant à son tour avec l'ensemble des point dans l'espace considéré (les points finaux des vecteurs $\vec{OV}$).

Considérons maintenant l'ensemble des vecteurs libres dans le plan, et choisissons un système de coordonnées Oxy, formé par deux axes perpendiculaires x et y à travers le point O, sur lesquels on indique une unité. Un vecteur libre $\vec{v}$ correspond alors avec le point final V du vecteur lié $\vec{OV}$. Les coordonnées (v_x, v_y) du point V sont appelées les *composantes* ou les *coordonnées* du vecteur libre $\vec{v}$. On conclut que les vecteurs libres dans le plan peuvent être représentés comme des paires de nombres réels, $\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y)$.

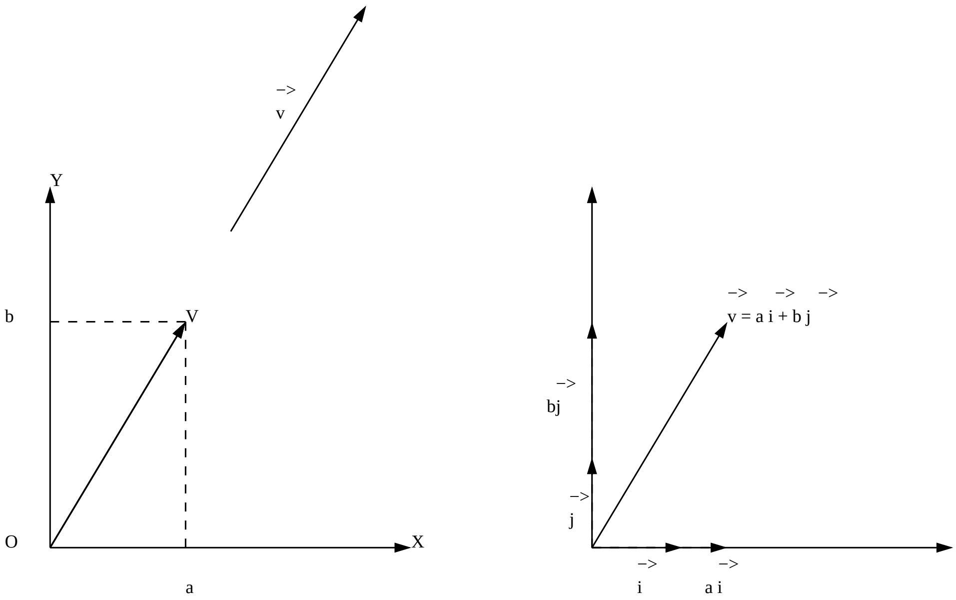

Figure 7. *Composantes d'un vecteur dans le plan*

De la même façon on construit, dans l'espace de dimension trois, un système de coordonnées $Oxyz$, formé par trois axes mutuellement perpendiculaires x, y et z à travers le point O, munis avec une unité. Pour des raisons pratiques, on choisira toujours un système *positif* ou *direct*, c'est à dire que l'orientation de l'axe z sera choisie telle que les trois axes x, y et z correspondent au pouce, index et majeur de la main droite. Un vecteur libre $\vec{v}$ correspond maintenant à un triplet de valeurs réelles, $\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y, v_z)$, les coordonnées du point terminal V du vecteur lié $\vec{OV}$ représentant le vecteur libre $\vec{v}$. Ces nombres réels sont appelés les *composantes* ou *coordonnées* du vecteur $\vec{v}$.

Considérons maintenant deux points A et B dans le plan ou dans l'espace, dont les coordonnées sont données par

$$A(a_x, a_y, a_z), \qquad B(b_x, b_y, b_z).$$

On montre alors que les composantes du vecteur libre $\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA}$, qui est représenté par le vecteur lié $\vec{AB}$, sont données par

$$(b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z).$$

Le module d'un vecteur $\vec{v}$ dont les composantes sont (v_x, v_y) est donné par

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

et pour un vecteur dont les composantes sont (v_x, v_y, v_z), il est donné par

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Les composantes du vecteur zéro sont $(0, 0)$ ou $(0, 0, 0)$.

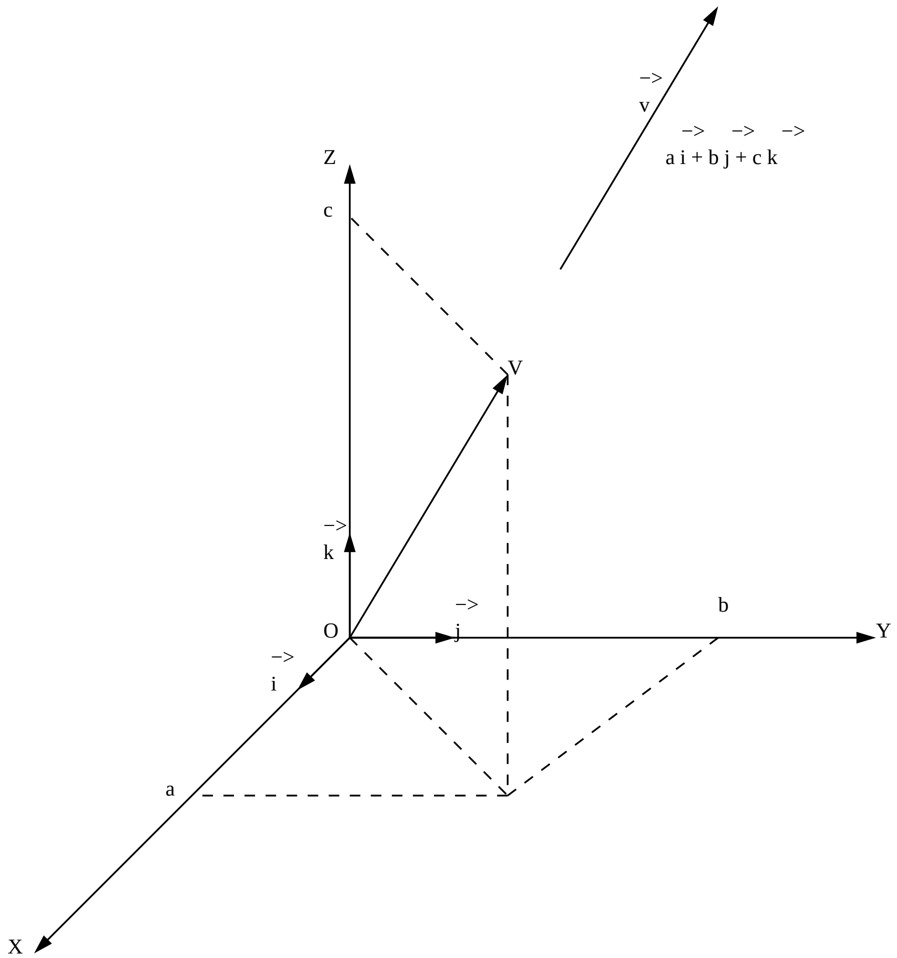

Figure 8. *Composantes d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions*

Si les composantes du vecteur $\vec{a}$ sont (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)), les composantes du vecteur $k \cdot \vec{a}$ sont données par (ka_x, ka_y) (resp. (ka_x, ka_y, ka_z)). Les composantes du vecteur opposé $-\vec{a}$ du vecteur libre $\vec{a}$ seront, par conséquent, données par $(-a_x, -a_y)$ (resp. $(-a_x, -a_y, -a_z)$).

Considérons maintenant deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dont les composantes sont (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) et (b_x, b_y) (resp. (b_x, b_y, b_z)). Les composantes de la somme sont alors données par

$$(a_x + b_x, a_y + b_y) \text{ resp. } (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

et la différence est déterminée par les composantes

$$(a_x - b_x, a_y - b_y) \text{ resp. } (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

Dans la suite de ce chapitre, on dénote par le symbole $\vec{i}$ le vecteur unitaire dans la direction de l'axe x, et pointant dans le sens positif, c'est-à-dire le vecteur libre dont les composantes sont données par $(1, 0)$ (ou $(1, 0, 0)$ pour les vecteurs dans l'espace). De la même façon, le vecteur $\vec{j}$ est un vecteur dont les composantes sont $(0, 1)$ (ou $(0, 1, 0)$), donc un vecteur unitaire dans la direction et le sens positif de l'axe y, et le symbole $\vec{k}$ dénote le vecteur unitaire correspondant à l'axe z, dont les composantes sont $(0, 0, 1)$. On montre alors facilement qu'un vecteur arbitraire $\vec{a}$ avec composantes (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) peut être décomposé comme une somme

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \text{ resp. } \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

5. Produit scalaire

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On définit le *produit scalaire* de ces vecteurs comme

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,$$

où φ représente l'angle entre les deux vecteurs.

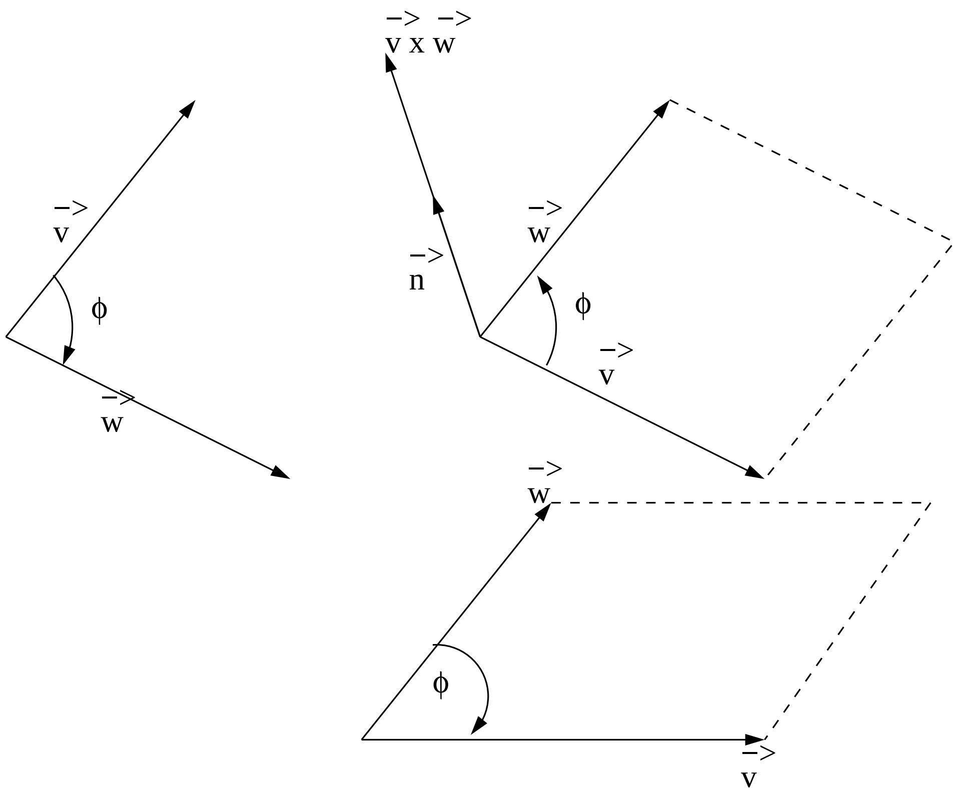

Figure 9.

Il est claire que

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},$$

et il suit de la définition que

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2\cos 0 = |\vec{a}|^2.$$

Il est également facile à montrer que $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ si et seulement si $\vec{a}=0$ ou $\vec{b}=0$ ou $\vec{a}\perp\vec{b}$. On montre, en plus, que

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}, \qquad (k\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = k\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

On conclut que, pour les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ (et $\vec{k}$) introduits ci-dessus,

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1, \qquad \vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0;$$

Par conséquent, le produit scalaire de deux vecteurs dont les composantes sont (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) et (b_x, b_y) (resp. (b_x, b_y, b_z)) est donné par

$$a_xb_x + a_yb_y (\text{resp. } a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z).$$

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$. Par définition,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

et il en suit que l'angle φ entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ peut être calculé à l'aide de la formule

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Considérons maintenant un vecteur $\vec{a}$ dans le plan, dont les composantes sont (a_x, a_y). L'angle formé par le vecteur $\vec{a}$ et l'axe (positif) x est alors donné par

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}},$$

et l'angle entre ce vecteur et l'axe (positif) y est déterminé par

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}.$$

Les angles entre un vecteur $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ dans l'espace et les trois axes du système de coordonnées sont donnés par les trois nombres

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

qu'on appelle les *cosinus directeurs* du vecteur $\vec{a}$. Il suit directement que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

6. Projection scalaire et vectorielle

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$. On peut alors construire la projection perpendiculaire du vecteur $\vec{a}$ sur la direction donnée par le vecteur $\vec{b}$, c'est-à-dire qu'on décompose $\vec{a}$ comme une somme

$$\vec{a} = \vec{t} + \vec{n},$$

où le vecteur $\vec{t} = k\vec{b}$ est parallèle au vecteur $\vec{b}$ et $\vec{n}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$. Le vecteur $\vec{t}$ est appelé la *projection vectorielle* de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$. On definit la *projection scalaire* du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur $\vec{b}$ comme le nombre $k|\vec{b}|$, c'est-à-dire, le module du vecteur $\vec{t}$, muni d'un signe: la projection scalaire est positive si $\vec{t}$ et $\vec{b}$ ont le même sens, négative si les deux vecteurs ont un sens opposé.

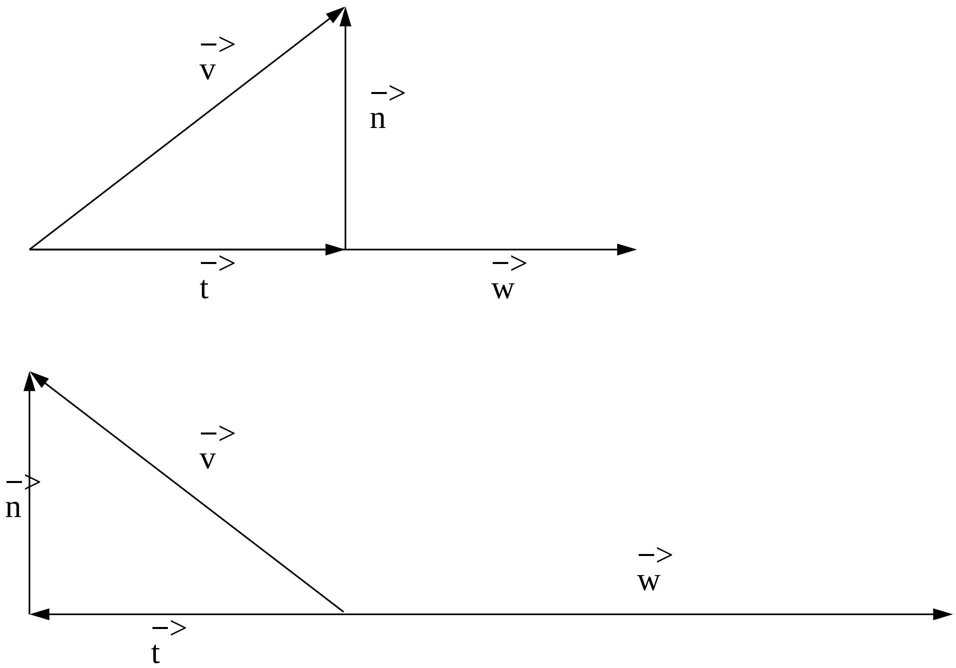

Figure 10.

On détermine la projection scalaire de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ comme

$$|\vec{a}|\cos\varphi = \vec{a}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

la projection vectorielle est alors donnée par

$$\vec{t} = |\vec{a}|\cos\varphi\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\cdot\vec{b}.$$

7. Produit vectoriel et produit triple

Considérons deux vecteurs libres $\vec{a}$ et $\vec{b}$, linéairement indépendants, dans l'espace de dimension trois. On construit alors un vecteur unitaire $\vec{n}$, perpendiculaire au plan formé par les deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, dont le sens est choisi tel que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{n}$ forment un système d'axes (un trièdre) positif (règle de la main droite). On définit alors le *produit vectoriel* $\vec{a}\times\vec{b}$ comme le vecteur

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot|\sin\varphi|\cdot\vec{n},$$

où φ est l'angle entre les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

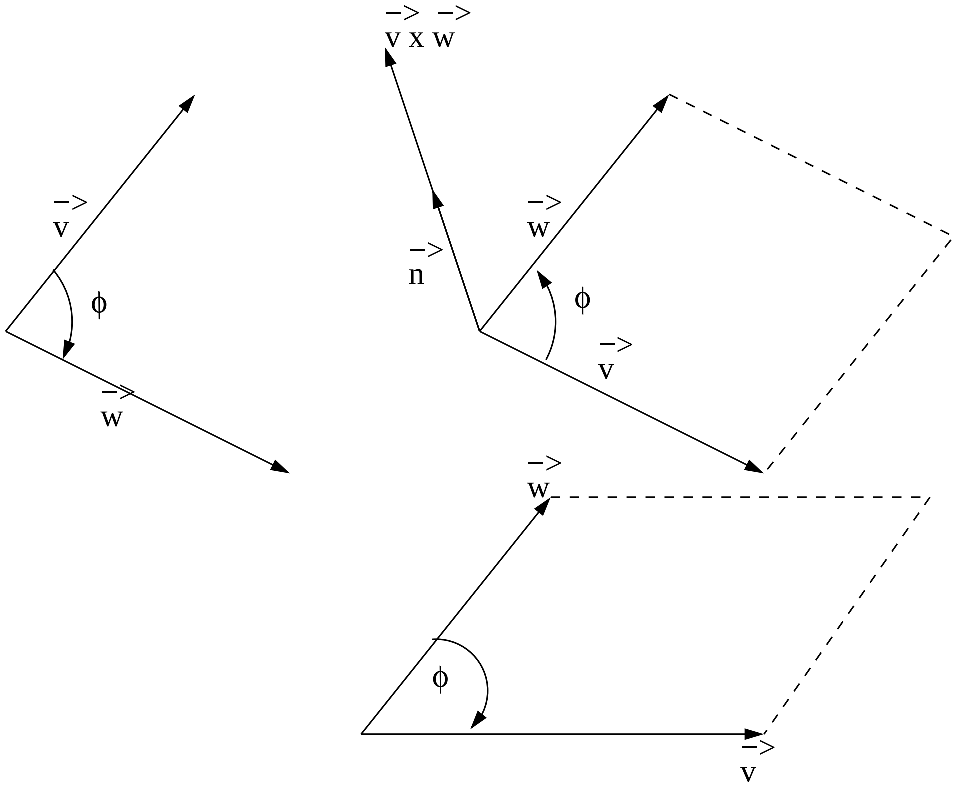

Figure 11.

Il suit immédiatement de la définition que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

et que

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

si et seulement si $\vec{a} = 0$ ou $\vec{b} = 0$ ou $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Il est également facile à montrer que

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi|$$

est égal à l'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, et on peut montrer que

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \qquad \vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

La définition (et notre choix d'un système de coordonnées positif) nous montre alors que, pour les vecteurs de base $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$, on a

$$\begin{aligned}
&\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \\
&\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \\
&\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j},
\end{aligned}$$

et le produit vectoriel de deux vecteurs aux composantes (a_x, a_y, a_z) et (b_x, b_y, b_z) est, par conséquent, donné par

$$(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Ce produit peut également être déterminé comme un déterminant (formel)

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Considérons maintenant trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dans l'espace de dimension trois. On définit le *produit triple* des trois vecteurs comme le nombre réel

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Un calcul simple nous montre que, si les composantes des vecteurs sont (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z) et (c_x, c_y, c_z), ce produit triple correspond au déterminant

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

La valeur absolue du produit triple nous donne le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$, le signe indiquant l'orientation du trièdre (positif ou négatif).

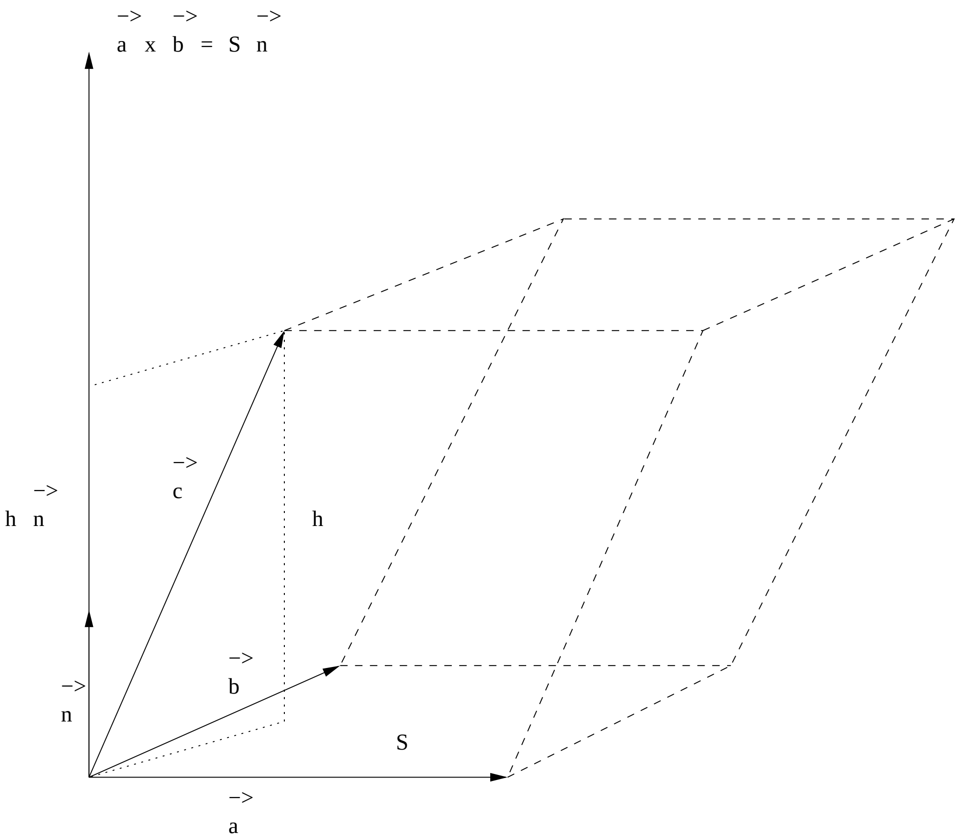

Figure 12.

3. Equation d'une droite et d'un plan

1. Equation d'une droite

Une droite dans l'espace de dimension trois est complètement déterminée par un point P_0 (coordonnées (x_0, y_y, z_0)) et sa direction, représentée par un vecteur libre (un vecteur directeur) $\vec{a} \neq 0$ (composantes (a, b, c)). Un point P (avec coordonnées (x, y, z)) appartient à la droite si et seulement si le vecteur $\vec{P_0P}$ a la même direction que le vecteur directeur $\vec{a}$, donc

$$\vec{P_0P} = k \cdot \vec{a}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Les composantes du vecteur $\vec{P_0P}$ sont données par $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, et on en dérive l'équation paramétrique de la droite,

$$\begin{cases} x = x_0 + ka, \\ y = y_0 + kb, \\ z = z_0 + kc. \end{cases}$$

Cette équation donne, pour chaque valeur $k \in \mathbb{R}$, les coordonnées d'un point P sur la droite. En éliminant le paramètre k de ces équations, on obtient l'équation de la droite, c'est-à-dire la condition qui doit être satisfaite par les coordonnées du point P pour qu'il appartienne à la droite. Si toutes les composantes du vecteur directeur $\vec{a}$ (les nombres directeurs de la droite) diffèrent de 0, on obtient l'équation

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Dans le cas où une des composantes du vecteur directeur $\vec{a}$ s'annulle, par exemple $a = 0$, l'équation paramétrique nous donne

$$x = x_0, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

si deux composantes de ce vecteur s'annullent, par exemple $a = b = 0$, on trouve l'équation

$$x = x_0, \qquad y = y_0.$$

2. Equation d'un plan

Un plan dans l'espace de dimension trois est complètement déterminé par un point P_0 avec coordonnées (x_0, y_0, z_0) et la direction perpendiculaire au plan, appelée direction normale. La direction normale est donnée par un vecteur libre $\vec{n} \neq 0$ avec composantes (n_1, n_2, n_3).

Un point P appartient au plan si le vecteur $\vec{P_0P}$, représentant une direction dans le plan, est perpendiculaire à la direction normale, donc

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n}, \qquad \vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$

Les composantes du vecteur $\vec{P_0P}$ étant données par $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, on obtient une équation de la forme

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

L'équation du plan peut donc être écrite sous la forme

$$n_1x + n_2y + n_3z = d, \qquad d = \vec{n} \cdot \vec{OP_0} = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0.$$

Le plan peut également être fixé à l'aide d'un P_0 et deux vecteurs directeurs (linéairement indépendants) dans le plan, $\vec{r}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ et $\vec{r}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Un point P appartient alors au plan si le vecteur $\vec{P_0P}$ est une combinaison linéaire des vecteurs directeurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$,

$$\vec{P_0P} = k_1\vec{r}_1 + k_2\vec{r}_2, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

ce qui nous permet d'obtenir l'équation paramétrique du plan,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_1a_1 + k_2a_2, \\ y &= y_0 + k_1b_1 + k_2b_2, \\ z &= z_0 + k_1c_1 + k_2c_2, \end{aligned}$$

L'équation du plan est alors obtenue par l'élimination des paramètres k_1 et k_2, et elle est donnée par la condition (sur le déterminant d'une matrice)

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Remarque. Le produit vectoriel $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ est un vecteur perpendiculaire aux deux vecteurs directeurs, et donc perpendiculaire au plan. Par conséquent, ce produit vectoriel nous donne un vecteur normale, et on obtient l'équation du plan en exigeant que

$$\vec{P_0P} \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = 0.$$

La définition du produit triple nous donne alors directement l'équation du plan sous la forme introduite ci-dessus.