Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Toegepaste en Exacte Wetenschappen

# Trigonométrie

Peter Bueken

HZS-OE5-NW140
Premier Bachelor Sciences Nautiques
Version 14.0
19 Septembre 2014

# Table des matières

# Chapitre 1

# Trigonométrie plane

## 1. Introduction

Le sujet central de la *trigonométrie (plane)* est l'étude des *angles (orientés)*. Plus précisément, dans la trigonométrie, on étudie une série de *valeurs trigonométriques* qui sont associées à un angle donné.

Les techniques et les résultats de cette étude sont alors utilisés dans l'étude de triangles. Dans ce cadre, le sujet central est la *résolution de triangles*, la détermination des dimensions et des angles inconnus d'un triangle à partir des autres dimensions et angles. Les résultats et les techniques de cette étude sont régulièrement utilisés dans la *navigation*, *l'astronomie* et la *topographie*.

## 2. Angle orienté

Un *angle (orienté)* est un objet composé de deux demi-droites $A$ et $B$, les *jambes* de l'angle, partant du même point $o$, le *sommet* de l'angle. Deux angles sont *identiques* ou *de la même taille* si les deux jambes du premier peuvent être posées sur celles du deuxième par un déplacement et une rotation. On remarque ici que l'ordre des deux jambes doit être respecté, d'où la notion d'une orientation. On représente cette orientation en indiquant par une flèche l'ordre des jambes de l'angle. En changeant l'ordre des jambes d'un angle donné, on obtient l'angle *opposé*.

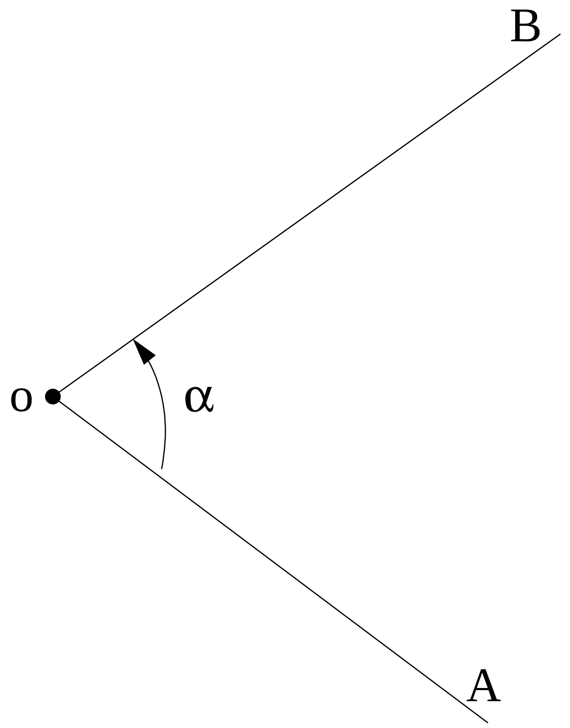


Figure 1. *Un angle orienté.*

# 3. Le cercle trigonométrique

Un *cercle trigonométrique* est un cercle dont le rayon correspond à une unité de longueur ($R = 1$) et sur lequel on indique un point de référence. En posant le sommet d'un angle au centre du cercle, et en faisant passer la première jambe $A$ de l'angle par le point de référence, un angle $\alpha$ correspond à un point unique du cercle. Cette construction sera utilisée régulièrement pour l'étude des constructions trigonométriques.

# 4. Mesurage d'un angle

La mesure d'un angle $\alpha$ se fait en comparant la longueur de l'arc, tracé sur un cercle (dont le centre se situe au sommet $o$ de l'angle), avec la circonférence totale de ce cercle.

Traditionnellement, on utilise deux systèmes d'unités pour l'indication de la taille de l'angle: *degrés-minutes-secondes* et *radians*.

### 1. Degrés, minutes, secondes

On dit qu'un arc mesure 1 degré ($1^\circ$) s'il trace un arc dont la longueur correspond à $\frac{1}{360}$ de la circonférence totale du cercle. Afin de mesurer des angles plus petits, et pour obtenir une plus grande précision, on dit également que

$$1^\circ = 60^{'}, \qquad 1^{'} = 60^{''}.$$

Un angle de $15^\circ 34^{'} 42^{''}$ trace donc un arc dont la longueur correspond à $(15 + \frac{34}{60} + \frac{42}{3600})\frac{1}{360} \approx \frac{43}{1000}$ de la circonférence du cercle.

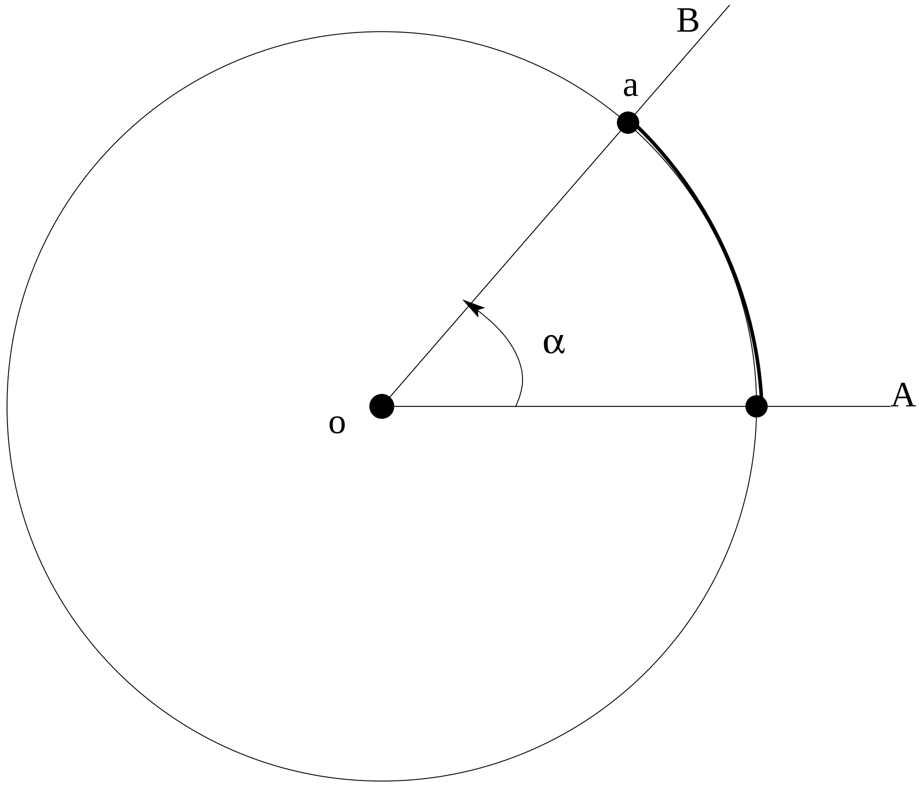


Figure 2. *Représentation d'un angle $\alpha$ sur le cercle trigonométrique.*

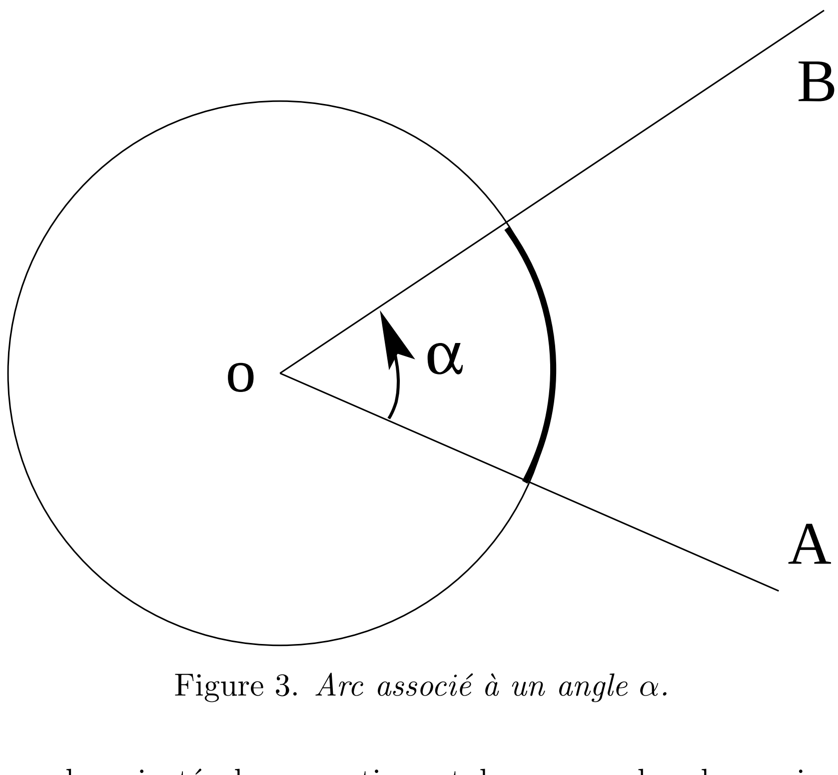


Figure 3. *Arc associé à un angle $\alpha$.*

En mesurant des angles orientés, la convention est de mesurer dans le sens inverse des aiguilles d'une montre. Si on mesure dans le sens des aiguilles, on indique la taille de l'angle par un nombre négatif.

Un angle de 360° correspond à la circonférence totale du cercle. Par conséquent, les jambes de cet angle sont coïncidentes, et l'angle *complet* est donc identique à l'angle *nul*. Plus général, en ajoutant un multiple de 360° à un angle $\alpha$ on obtient un angle identique. On utilise cette technique pour la réduction d'un angle négatif à un angle positif (entre 0° et 360°). Par exemple, on constate que $-30° = -30° + 360° = 330°$. Cette opération correspond à un changement de la direction dans laquelle on mesure l'angle, et à l'élimination d'un nombre de tours complets du cercle.

**2. Radians**

Un angle mesure 1 radian (1 rad) s'il trace sur le cercle un arc dont la longueur correspond au rayon $R$ du cercle. La circonférence d'un cercle de rayon $R$ est égale à $2\pi R$, et par conséquent, l'angle complet (360°) correspond à $2\pi$ rad. Comme avant, on peut donc toujours ajouter un multiple de $2\pi$ rad à un angle donné. Par exemple,

$$-\frac{\pi}{3} \text{ rad} = -\frac{\pi}{3} \text{ rad} + 2\pi \text{ rad} = \frac{5\pi}{3} \text{ rad}.$$

Il est aussi facile de convertir la taille d'un angle de degrés en radians et vice versa. En effet,

$$2\pi \text{ rad} = 360°,$$

et, par conséquent,

$$1° = \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 0,01745 \text{ rad}, \qquad 1 \text{ rad} = \frac{360}{2\pi}° \approx 57,295779° \approx 57°17'44,8''$$

Il suit immédiatement que

$$\begin{aligned} 30° &= 30\frac{2\pi}{360} \text{ rad} = \frac{\pi}{6} \text{ rad}, \\ 12°17'35'' &\approx 12,29 \cdot \frac{2\pi}{360} \text{ rad} \approx 0,21 \text{ rad}. \end{aligned}$$

et que

$$2 \text{ rad} = 2\frac{360}{2\pi}° \approx 114°35'30''.$$

# 5. Angles spéciaux et angles relatés

- L'angle *nul* a deux jambes coïncidentes, et il mesure donc $0° = 0$ rad. L'angle *complet* mesure $360° = 2\pi$ rad, et il est identique à l'angle nul.
- Un angle *plat* mesure $180° = \pi$ rad. La deuxième jambe d'un angle plat est le prolongement de la première.
- Un angle est appelé *droit* s'il mesure $\pm 90° = \pm\frac{\pi}{2}$ rad. L'angle $\alpha$ est appelé *aigu* si

$$-90° < \alpha < 90°, \qquad -\frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ rad}.$$

Si

$$90° < \alpha < 270°, \qquad \frac{\pi}{2} \text{ rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{ rad},$$

on dit que $\alpha$ forme un angle *obtus*.

- L'angle *opposé* d'un angle $\alpha$ est l'angle

$$-\alpha = -\alpha + 2\pi \text{ rad} = -\alpha + 360°.$$

- Deux angles sont *complémentaires* si leur somme est égale à $90° = \frac{\pi}{2}$ rad. L'angle complémentaire de l'angle $\alpha$ est donc

$$\beta = 90° - \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ rad} - \alpha.$$

- Deux angles sont appelés *supplémentaires* si leur somme est $180° = \pi$ rad. L'angle supplémentaire de $\alpha$ est donc donné par

$$\beta = \pi \text{ rad} - \alpha = 180° - \alpha.$$

- Deux angles sont appelés *antisupplémentaires* si leur différence mesure $180° = \pi$ rad. L'angle antisupplémentaire de $\alpha$ est donc donné par

$$\beta = \pi \text{ rad} + \alpha = 180° + \alpha.$$

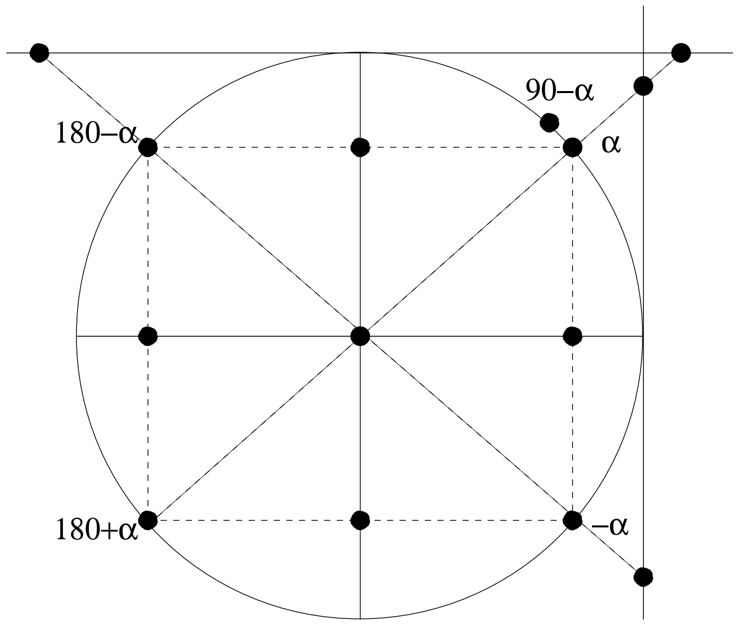


Figure 4. *Angles relatés de l'angle $\alpha$.*

- A cause de leurs propriétés intéressantes, les angles de $0° = 0$ rad, $30° = \frac{\pi}{6}$ rad, $45° = \frac{\pi}{4}$ rad, $60° = \frac{\pi}{3}$ rad, $90° = \frac{\pi}{2}$ rad et leurs angles opposés, supplémentaires et antisupplémentaires, jouent un rôle important dans la trigonométrie.

# 6. Nombres trigonométriques

Considérons un angle (aigu) $\alpha$, formé par les jambes $A$ et $B$ dans un sommet $o$. Choisissons sur $B$ un point $b$, et projetons ce point perpendiculairement sur la demi-droite $A$. Le point d'intersection est dénoté par $a$. On montre alors que les proportions des longueurs $oa$, $ob$ et $ab$ des côtés du triangle $oab$,

$$\frac{oa}{ob}, \quad \frac{ab}{ob}, \quad \frac{ab}{oa}$$

sont indépendants du point $b$ choisi, et ne dépendent donc que de l'angle $\alpha$. Si on choisit donc un autre point $b'$ sur $B$, et on construit, comme avant, le point correspondant $a'$ sur $A$, on constate que

$$\frac{oa}{ob} = \frac{oa'}{ob'}, \quad \frac{ab}{ob} = \frac{a'b'}{ob'}, \quad \frac{ab}{oa} = \frac{a'b'}{oa'}.$$

On définit le *sinus* $\sin\alpha$ et le *cosinus* $\cos\alpha$ de l'angle $\alpha$ comme

$$\sin\alpha = \frac{ab}{ob}, \quad \cos\alpha = \frac{oa}{ob}.$$

De la même façon, la *tangente* $\operatorname{tg}\alpha$ et la *cotangente* $\operatorname{cotg}\alpha$ de l'angle $\alpha$ sont définies par

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{ab}{oa}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{oa}{ab}.$$

La *sécante* $\sec\alpha$ et la *cosécante* $\operatorname{cosec}\alpha$ de l'angle $\alpha$ sont définies comme

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

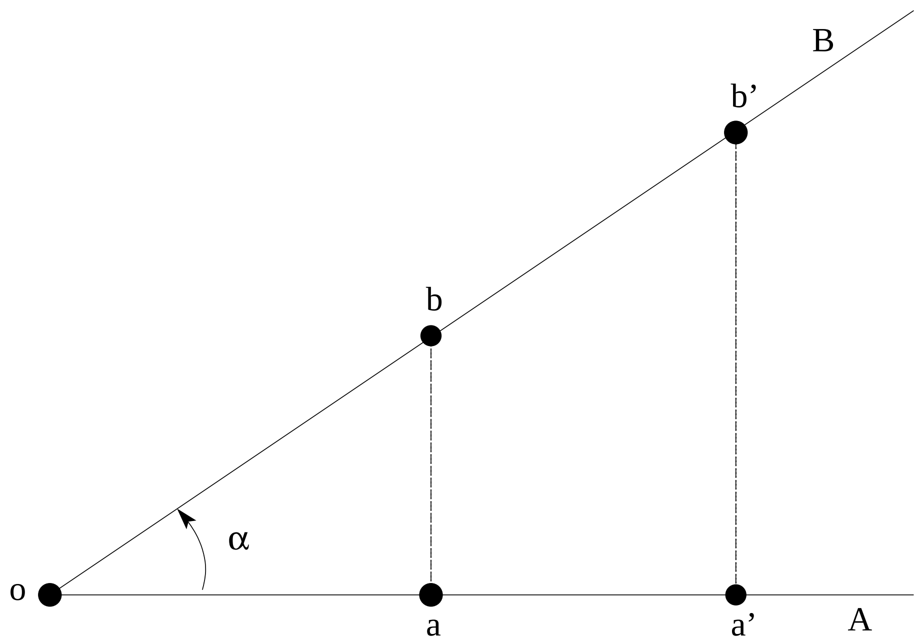


Figure 5. *Construction des nombres trigonométriques d'un angle*

Représentons maintenant l'angle (aigu) $\alpha$ comme un point $a$ sur le cercle trigonométrique. On constate alors (sur la Figure 6) que le cosinus et le sinus de l'angle $\alpha$ correspondent aux longueurs des projections du point $a$ sur les axes horizontal et vertical du cercle, ou aux coordonnées $x$ et $y$ du point $a$. Ceci nous permet de généraliser la définition de $\sin\alpha$ et de $\cos\alpha$ aux angles non-aigus. A cet effet, on dira que $\cos\alpha$ est la coordonnée $x$ du point $a$, et que $\sin\alpha$ est la coordonnée $y$ du point $a$. Il est clair que, pour les angles $\alpha$ tels que le point correspondant $a$ se situe *à gauche* de l'axe vertical (ou *au-dessous* de l'axe horizontal) du cercle, les nombres trigonométriques $\cos\alpha$ (ou $\sin\alpha$) ont une valeur négative.

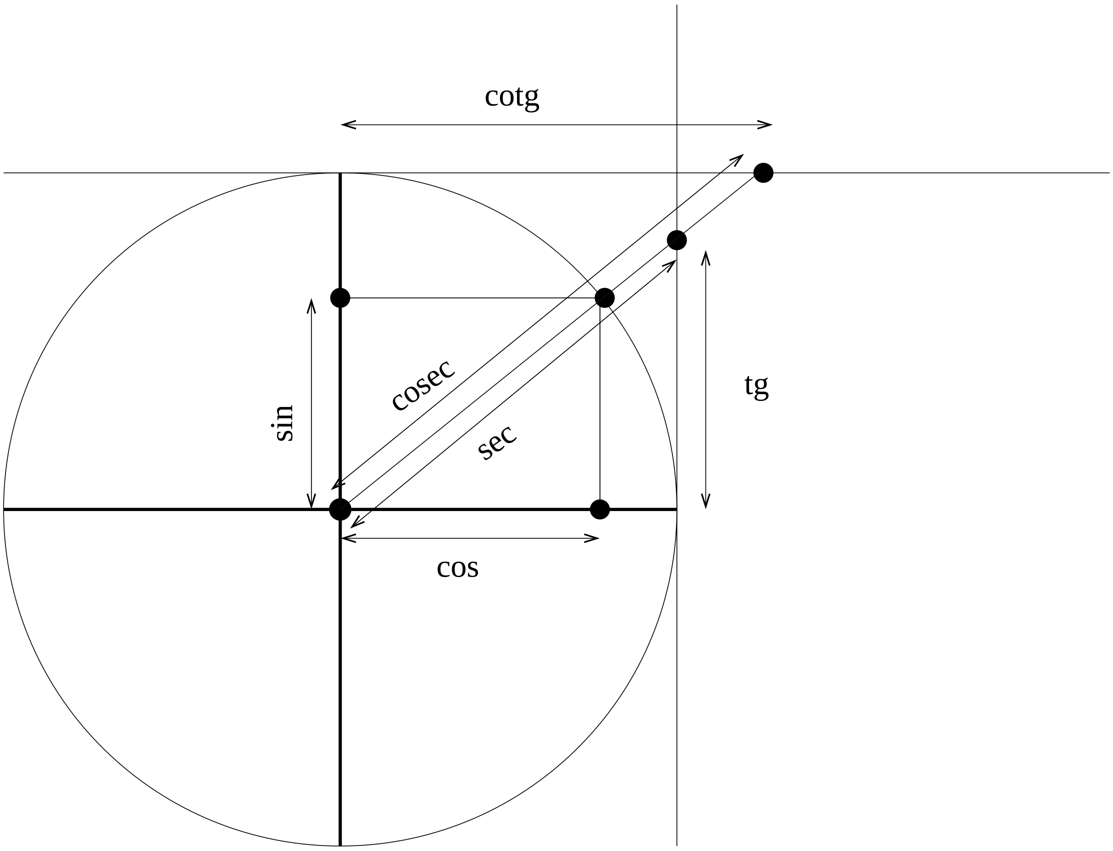


Figure 6. *Interprétation des nombres trigonométriques*

Le tableau suivant résume les nombres trigonométriques de quelques angles très importants.

| $\alpha$ | $0°$ $0$ rad | $30°$ $\frac{\pi}{6}$ rad | $45°$ $\frac{\pi}{4}$ rad | $60°$ $\frac{\pi}{3}$ rad | $90°$ $\frac{\pi}{2}$ rad | $180°$ $\pi$ rad | $270°$ $\frac{3\pi}{2}$ rad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos(\alpha)$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |
| $\mathrm{tg}(\alpha)$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $\infty$ | $0$ | $\infty$ |

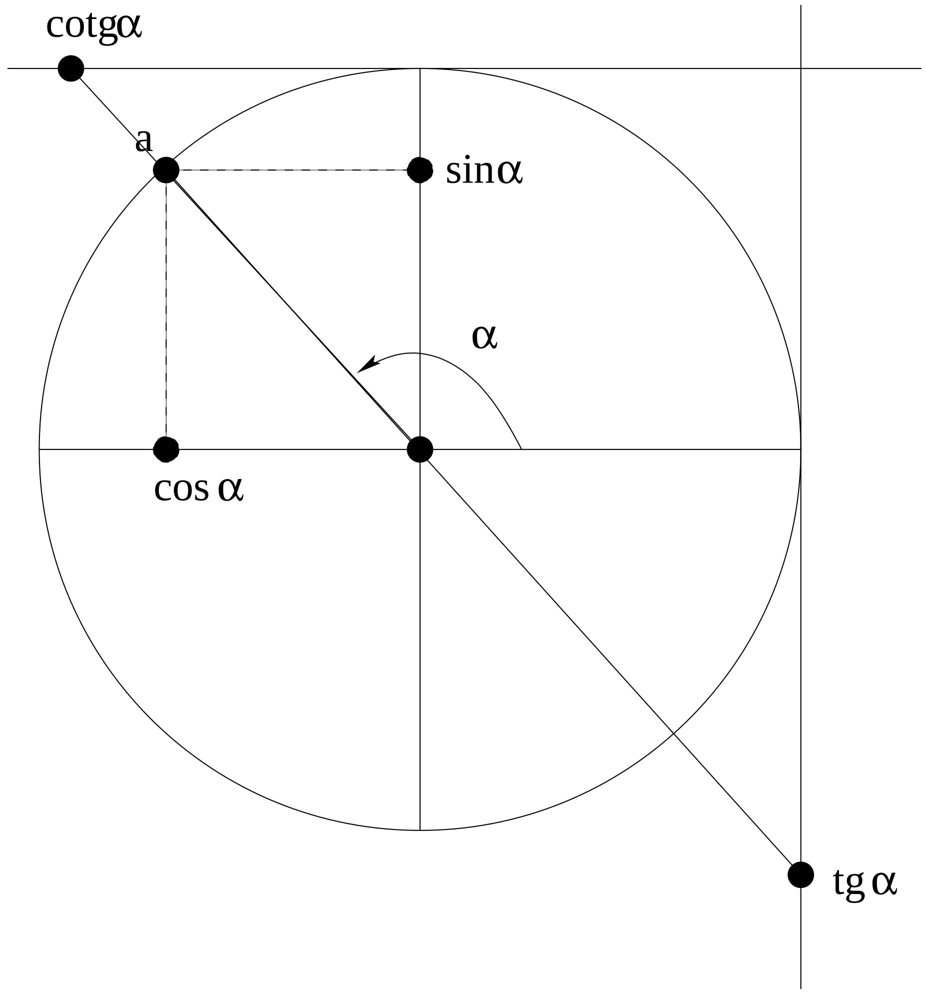


Figure 7. *Nombres trigonométriques d'une angle arbitraire $\alpha$.*

# 7. Identités trigonométriques

Les nombres trigonométriques d'un seul angle, et les nombres trigonométriques d'angles relatés sont reliés par une série d'identités trigonométriques.

Application du théorème de Pythagore sur les triangles rectangles dans la Figure 6 nous montre immédiatement que

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1, \qquad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \qquad 1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha.$$

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux angles arbitraires. On montre alors que

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,\\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}$$

Il suit immédiatement que

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

En remplaçant dans ces formules $\alpha$ par 0 et $\beta$ par $\alpha$ on trouve les nombres trigonométriques pour l'angle opposé $-\alpha$,

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

De la même façon, en remplaçant $\alpha$ par $\pi$ et $\beta$ par $\alpha$, on obtient les valeurs trigonométriques pour l'angle supplémentaire $\pi - \alpha$,

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha, \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Pour l'angle antisupplémentaire $\pi + \alpha$, les formules nous montrent que

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha, \qquad \cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\pi+\alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Si on remplace $\alpha$ par $\frac{\pi}{2}$ et $\beta$ par $\alpha$ on obtient les formules qui relient les nombres trigonométriques de deux angles complémentaires $\alpha$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \cos\alpha, \qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \sin\alpha, \qquad \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Les formules peuvent également être dérivées de la construction en Figure 4.

En mettant $\alpha = \beta$ on obtient les valeurs trigonométriques de l'angle *double*,

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

**Exercice 1.** Construisez les formules qui expriment $\sin 3\alpha$ et $\cos 3\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$.

En calculant la somme et la différence des identités fondamentales, on obtient les *formules de Simpson*,

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta),$$
$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta),$$
$$-2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta).$$

Finalement, si on remplace $\alpha + \beta = \psi$ et $\alpha - \beta = \varphi$, ces formules prennent la forme

$$\sin(\psi) + \sin(\varphi) = 2\sin(\frac{\psi+\varphi}{2})\cos(\frac{\psi-\varphi}{2}),$$
$$\sin(\psi) - \sin(\varphi) = 2\cos(\frac{\psi+\varphi}{2})\sin(\frac{\psi-\varphi}{2}),$$
$$\cos(\psi) + \cos(\varphi) = 2\cos(\frac{\psi+\varphi}{2})\cos(\frac{\psi-\varphi}{2}),$$
$$\cos(\psi) - \cos(\varphi) = -2\sin(\frac{\psi+\varphi}{2})\sin(\frac{\psi-\varphi}{2}).$$

# 8. Résolution de triangles rectangles

Le problème central de la trigonométrie est la *résolution de triangles*, c'est-à-dire, la détermination des dimensions inconnues d'un triangle (longueurs des côtés, tailles des angles) à l'aide des dimensions connues de ce triangle. Il est clair que ces techniques joueront un rôle fondamental dans la navigation et la topographie, où il est souvent important de pouvoir calculer une distance (sans la mesurer directement) à l'aide d'autres données qui sont plus faciles à déterminer.

Un triangle est appelé *rectangle* si un des angles est droit (et mesure donc 90°). On dénote les côtés et les angles comme indiqué dans la Figure 8.

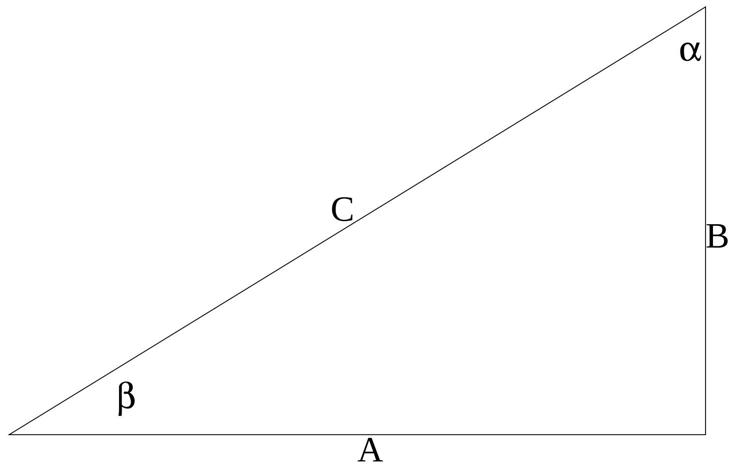


Figure 8. *Un triangle rectangle.*

On résume d'abord les relations valables dans un triangle *rectangle*, qui sont à la base de cette étude:

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta = 90^\circ,\\
&A^2 + B^2 = C^2, \quad \text{(le théorème de Pythagore)}\\
&\frac{A}{C} = \sin\alpha = \cos\beta,\\
&\frac{B}{C} = \cos\alpha = \sin\beta,\\
&\frac{B}{A} = \operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{tg}\beta,\\
&\frac{A}{B} = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta.
\end{aligned}$$

**1. Hypothénuse $C$ et angle aigu $\beta$ connus.**

Dans ce cas,

$$\alpha = 90^\circ - \beta,$$

et

$$A = C\cos\beta, \quad B = C\sin\beta.$$

**2. Angle aigu $\beta$ et côté opposée $B$ connus.**

Maintenant,

$$\alpha = 90^\circ - \beta,$$

et

$$C = \frac{B}{\sin\beta}, \quad A = \frac{B}{\operatorname{tg}\beta}.$$

**3. Hypothénuse $C$ et côté rectangle $A$ connus.**

Clairement, une solution de ce triangle n'existe que dans le cas où $A < C$. Alors,

$$B = \sqrt{C^2 - A^2},$$

et

$$\cos\beta = \frac{A}{C}.$$

On calcule ensuite l'angle $\beta$, et on sait que

$$\alpha = 90^\circ - \beta.$$

**4. Deux côtés rectangles $A$ et $B$ connus.**

Il suit du théorème de Pythagore que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2},$$

et on sait que

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{B}{A}.$$

On calcule alors $\beta$, et il suit immédiatement que

$$\alpha = 90^\circ - \beta.$$

# 9. Résolution de triangles arbitraires

On dénote les côtés et les angles comme indiqué dans la Figure 9.

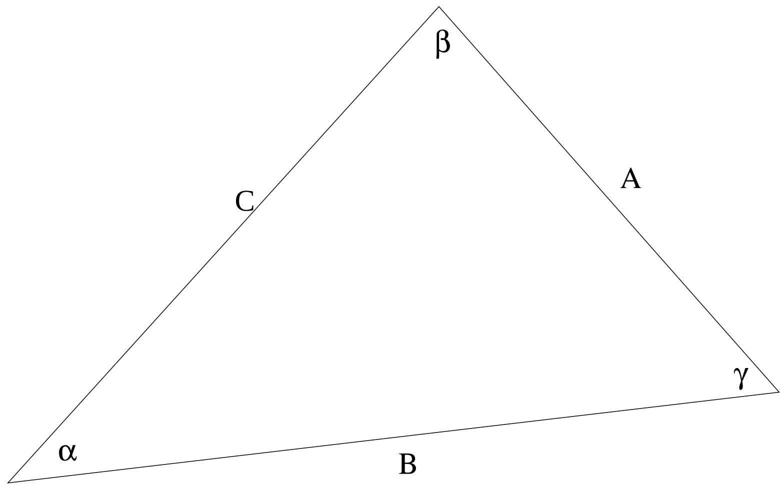


Figure 9. *Un triangle arbitraire.*

D'abord, la somme des trois angles d'un triangle arbitraire est toujours égale à 180°,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

La *règle des sinus* nous montre que

$$\frac{A}{\sin \alpha} = \frac{B}{\sin \beta} = \frac{C}{\sin \gamma}.$$

Ensuite, la *règle des cosinus* nous permet de calculer la longueur d'un côté en fonction des deux autres côtés et de l'angle opposé,

$$\begin{aligned} A^2 &= B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha, \\ B^2 &= A^2 + C^2 - 2AC \cos \beta, \\ C^2 &= A^2 + B^2 - 2AB \cos \gamma. \end{aligned}$$

On remarque que, dans un triangle rectangle (où $\gamma = 90°$) les règles des sinus et des cosinus correspondent aux formules mentionnées ci-dessus.

**1. Deux côtés $A$ et $B$ et l'angle $\gamma$ connus.**

Dans ce cas,

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2BC \cos \gamma,$$

et

$$\cos \beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC}.$$

On détermine alors l'angle $\beta$, et il suit que

$$\alpha = \pi \text{ rad} - (\beta + \gamma).$$

**2. Trois côtés $A$, $B$ et $C$ connus.**

Dans ce cas il suit de la règle des cosinus que

$$\cos\alpha = \frac{B^2 + C^2 - A^2}{2BC}, \quad \cos\beta = \frac{A^2 + C^2 - B^2}{2AC},$$

et ces formules nous permettent de calculer $\alpha$ en $\beta$. Il suit alors que

$$\gamma = \pi \text{ rad} - (\alpha + \beta).$$

**3. Un côté $A$ et deux angles $\beta$ et $\gamma$ connus.**

Maintenant,

$$\gamma = \pi \text{ rad} - (\beta + \gamma),$$

et il suit de la règle des sinus que

$$B = \frac{A\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad C = \frac{A\sin\gamma}{\sin\alpha}.$$

**4. Deux côtés $A$ et $B$ et l'angle opposé $\alpha$ connus.**

Il suit maintenant de la règle des sinus que

$$\sin\beta = \frac{B\sin\alpha}{A}.$$

Ceci nous permet de déterminer la valeur de l'angle $\beta$. On remarque que $\sin(\pi - \beta) = \sin\beta$, impliquant l'existence de deux valeurs différentes pour $\beta$. Il suit que plusieurs solutions sont possibles.

On sait que

$$\gamma = \pi \text{ rad} - (\beta + \gamma).$$

Parce que $\gamma$ doit prendre une valeur positive, les seules valeurs acceptables de $\beta$ sont telles que $\alpha + \beta < \pi$ rad. Le nombre de solutions possibles est, par conséquent, 0, 1 ou 2.

Pour chaque valeur acceptable de $\gamma$ il suit de la règle des cosinus que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma}.$$

# Chapitre 2

# Trigonométrie sphérique

## 1. Introduction

Un triangle $\triangle ABC$ dans le plan est formé par un ensemble de trois sommets $A$, $B$ et $C$, et les lignes (côtés) reliant les sommets (en réalisant la distance la plus petite possible entre les sommets). La trigonométrie plane étudie les relations entre les longueurs des côtés et les angles formés par les côtés d'un triangle, et l'usage de ces relations pour la détermination de certaines dimensions d'un triangle étant donné certaines autres dimensions du triangle. Dans le Chapitre 1 on a vu que la trigonométrie plane joue un rôle central dans la navigation et la topographie, dans le cas où les distances entre les points considérés sont petites, et la surface de la Terre peut donc être considérée comme un plan.

Pour la solution de problèmes à une échelle globale, il faut tenir compte du fait que la surface de la Terre est courbée. Comme cette surface peut, avec un degré de précision suffisamment grand, être considérée comme une sphère, il suffit de faire une étude générale de "triangles" sur une surface sphérique. Ces triangles sont appelés "triangles sphériques". Un triangle sphérique est formé par un ensemble de trois points $A$, $B$ et $C$ (les sommets), sur la sphère, reliés par les côtés, également situés sur la sphère. Le but de notre étude est alors la détermination des relations entre les longueurs des côtés (distance entre sommets) et les angles, formés par les côtés, et la détermination des dimensions inconnues d'un triangle sphérique étant donné certaines autres dimensions du triangle. Comme, sur la sphère, on ne peut pas utiliser les lignes droites reliant les sommets pour la représentation des côtés, il faut d'abord étudier comment on peut généraliser la notion d'un triangle et donc comment arriver à une définition exacte d'un triangle sphérique.

## 2. Définitions et terminologie

Considérons une sphère de rayon $R$ dont le centre est situé en un point $O$, et deux points $A$ et $B$ sur la sphère. Un plan à travers les points $O$, $A$ et $B$ coupe la sphère suivant un cercle, qu'on appelle un *grand cercle* de la sphère. Un grand cercle divise la sphère en deux parties égales, qu'on appelle *hémisphères*.

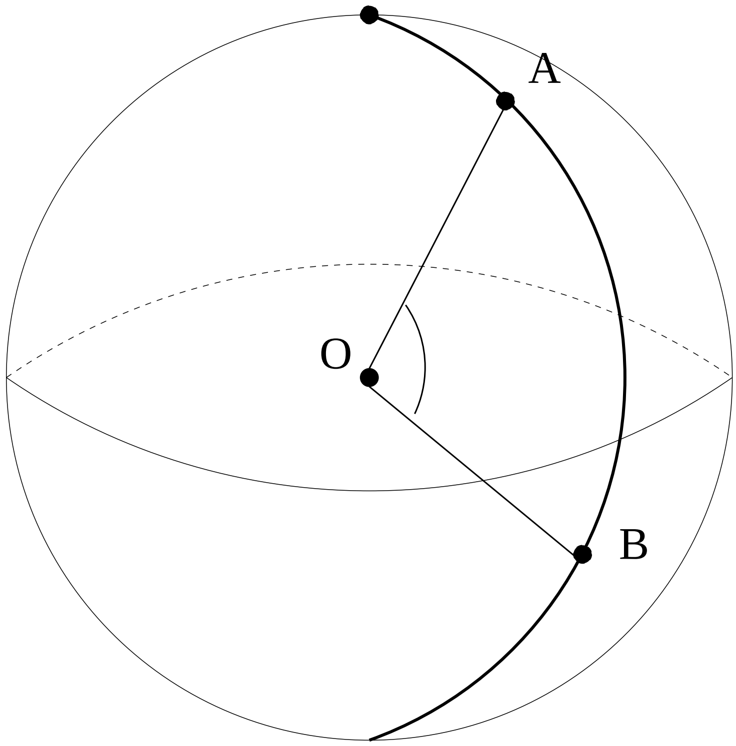


Figure 10. *Un grand cercle sur la sphère*

Si les deux points $A$ et $B$ ne sont pas diamétralement opposés, le plan passant par $O$, $A$ et $B$ est unique, et il existe donc un seul grand cercle reliant les deux points $A$ et $B$. Les points $A$ et $B$ divisent ce grand cercle en deux arcs. Un de ces arcs est inférieur à une demi-circonférence, l'autre est supérieur à la demi-circonférence. L'*arc* $\widehat{\text{AB}}$ est alors le plus petit de ces deux segments du cercle. Cet arc $\widehat{\text{AB}}$ représente la courbe la plus courte possible reliant les deux points $A$ et $B$, située entièrement sur la sphère, et la longueur de cet arc $\widehat{\text{AB}}$ est appelée la *distance sphérique* de $A$ à $B$. Par conséquent, l'arc $\widehat{\text{AB}}$ est considéré, en trigonométrie sphérique, comme la généralisation de la notion d'une ligne "droite" en trigonométrie plane.

Considérons maintenant, sur la sphère, deux arcs $\widehat{\text{AB}}$ et $\widehat{\text{AC}}$, passant par le point $A$. Ces arcs forment alors un *angle sphérique* $\widehat{BAC}$. Les arcs $\widehat{\text{AB}}$ et $\widehat{\text{AC}}$ sont les *côtés* de l'angle sphérique, le point d'intersection des arcs $A$ est le *sommet* de l'angle sphérique $\widehat{BAC}$. La mesure de l'angle sphérique $\widehat{BAC}$ est égale à l'angle formé par les deux plans $OAB$ et $OAC$, ou de l'angle formé par les tangentes aux arcs en $A$.

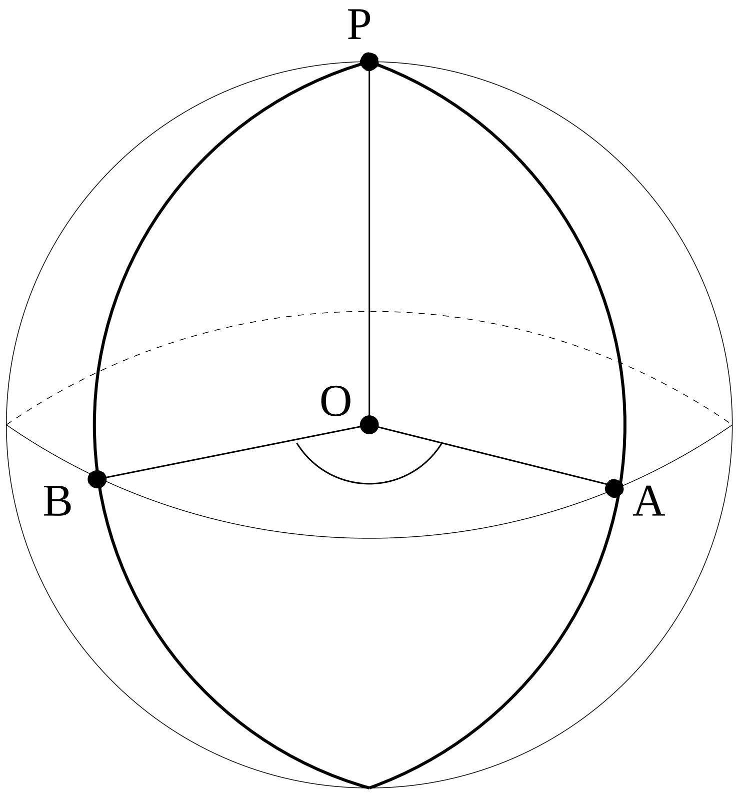


Figure 11. *Un angle sphérique formé par deux arcs*

Considérons maintenant trois points $A$, $B$ et $C$ sur la sphère. La partie de la sphère, bornée par les arcs $c = \widehat{\mathrm{AB}}$, $a = \widehat{\mathrm{BC}}$ et $b = \widehat{\mathrm{CA}}$, est appelé un *triangle sphérique.* Les arcs $a$, $b$ et $c$ qui délimitent le triangle sphérique sont les *côtés* du triangle sphérique, les points $A$, $B$ et $C$ sont les *sommets* du triangle sphérique.

En trigonométrie sphérique, on étudie les relations qui existent entre les longueurs des arcs (représentées, dans la suite de ce chapitre, par le même symbole que le côté même) et les angles sphériques formés par ces côtés (qu'on représente par le même symbole que le sommet correspondant). Un côté $a = \widehat{\mathrm{BC}}$ du triangle étant complètement déterminé par l'angle $\widehat{BOC}$, on indiquera dans la suite les longueurs des côtés du triangle en radians ou en degrés.

**Remarque.** On voit immédiatement que chaque côté et chaque angle d'un triangle sphérique mesure moins que 180° ou $\pi$ radians. En outre, on peut montrer que, dans un triangle sphérique arbitraire,

- la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure à la longueur du troisième,

$$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad c + a > b;$$

- le périmètre du triangle est inférieur à la circonférence d'un grand cercle,

$$a + b + c < 2\pi;$$

en dénotant $a + b + c = 2p$, on montre que

$$p < \pi, \qquad a < p, \quad b < p, \quad c < p;$$

- si deux côtés d'un triangle sont égaux, les angles opposés sont également égaux, et inversement,
$$a = b \Leftrightarrow A = B;$$
- si les deux côtés ne sont pas égaux, le côté le plus grand est opposé à l'angle le plus grand,
$$a > b \Leftrightarrow A > B;$$
- la somme des trois angles du triangle satisfait l'inégalité
$$\pi < A + B + C < 3\pi.$$

Considérons maintenant un arc $\widehat{\mathrm{AB}}$ sur la sphère. La droite passant par le point $O$, perpendiculaire au plan $OAB$, intersecte la sphère en deux points $P_1$ et $P_2$, qu'on appelle les *pôles* de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$ ou du grand cercle correspondant. (Le grand cercle est "l'équateur" correspondant aux pôles considérés.)

**Remarque.** Supposons que le point $P$ est un des pôles du grand cercle $E$ sur la sphère, et choisissons un deuxième grand cercle $E'$ passant par le point $P$. Il est alors facile à montrer que les pôles du grand cercle $E'$ seront situés sur le grand cercle $E$. Cette propriété est appelée la *réciprocité polaire.*

Considérons ensuite un triangle sphérique $\triangle ABC$, et choisissons, associé au côté $a = \widehat{\mathrm{BC}}$ (resp. $b = \widehat{\mathrm{AC}}$, $c = \widehat{\mathrm{AB}}$) du triangle le pôle $A'$ (resp. $B'$, $C'$) situé dans la même hémisphère que le sommet opposé $A$ (resp. $B$, $C$). On obtient alors un deuxième triangle sphérique $\triangle A'B'C'$, qu'on appelle le *triangle polaire* du triangle sphérique $\triangle ABC$.

On démontre facilement que, si $\triangle A'B'C'$ est le triangle polaire du triangle sphérique $\triangle ABC$, $\triangle ABC$ est le triangle polaire de $\triangle A'B'C'$. A cet effet, supposons que $\triangle A'B'C'$ est le triangle polaire du triangle sphérique $\triangle ABC$, et que, par conséquent, $A'$ (resp. $B'$, $C'$) est le pôle du côté $a$ (resp. $b$, $c$). Il suffit alors de montrer que le sommet $A$ est le pôle du côté $a'$. On remarque que le côté $a'$ du triangle polaire contient les sommets $B'$ et $C'$, et il suit alors de la réciprocité polaire que le pôle du côté $a'$ est situé sur les grands cercles correspondants aux côtés $b$ et $c$. Ces cercles s'intersectent au point $A$ (et au point diamétralement opposé) et on conclut que le sommet $A$ est le pôle du côté $a'$.

En outre, la longueur d'un côté d'un triangle et le sommet opposé du triangle polaire forment deux angles supplémentaires,
$$A + a' = B + b' = C + c' = a + A' = b + B' = c + C' = \pi. \tag{1}$$
Afin de démontrer cette formule, il suffit de considérer le côté $a'$ du triangle polaire comme l'équateur correspondant au pôle $A$. Si on prolonge alors les deux côtés $b$ et $c$ à travers le point $A$, ces arcs couperont l'équateur aux points $D$ et $E$, et il est clair que l'angle sphérique $A$ est égale à l'angle $\widehat{DOE}$. Le point $B'$ étant le pôle du côté $b = \widehat{\mathrm{AC}}$, qui contient le point $D$, et le point $C'$ étant le pôle du côté $c$, contenant le point $E$, et la distance entre le pôle et un point de l'équateur toujours étant un angle droit, on voit que
$$\widehat{B'OD} = \widehat{C'OE} = \frac{\pi}{2},$$
et il suit que
$$\begin{aligned}\pi &= \widehat{B'OD} + \widehat{C'OE}\\ &= \widehat{B'OC'} + \widehat{DOE}\\ &= a' + A.\end{aligned}$$

## 3. Relations entre les éléments d'un triangle sphérique

### 1. Première règle des cosinus

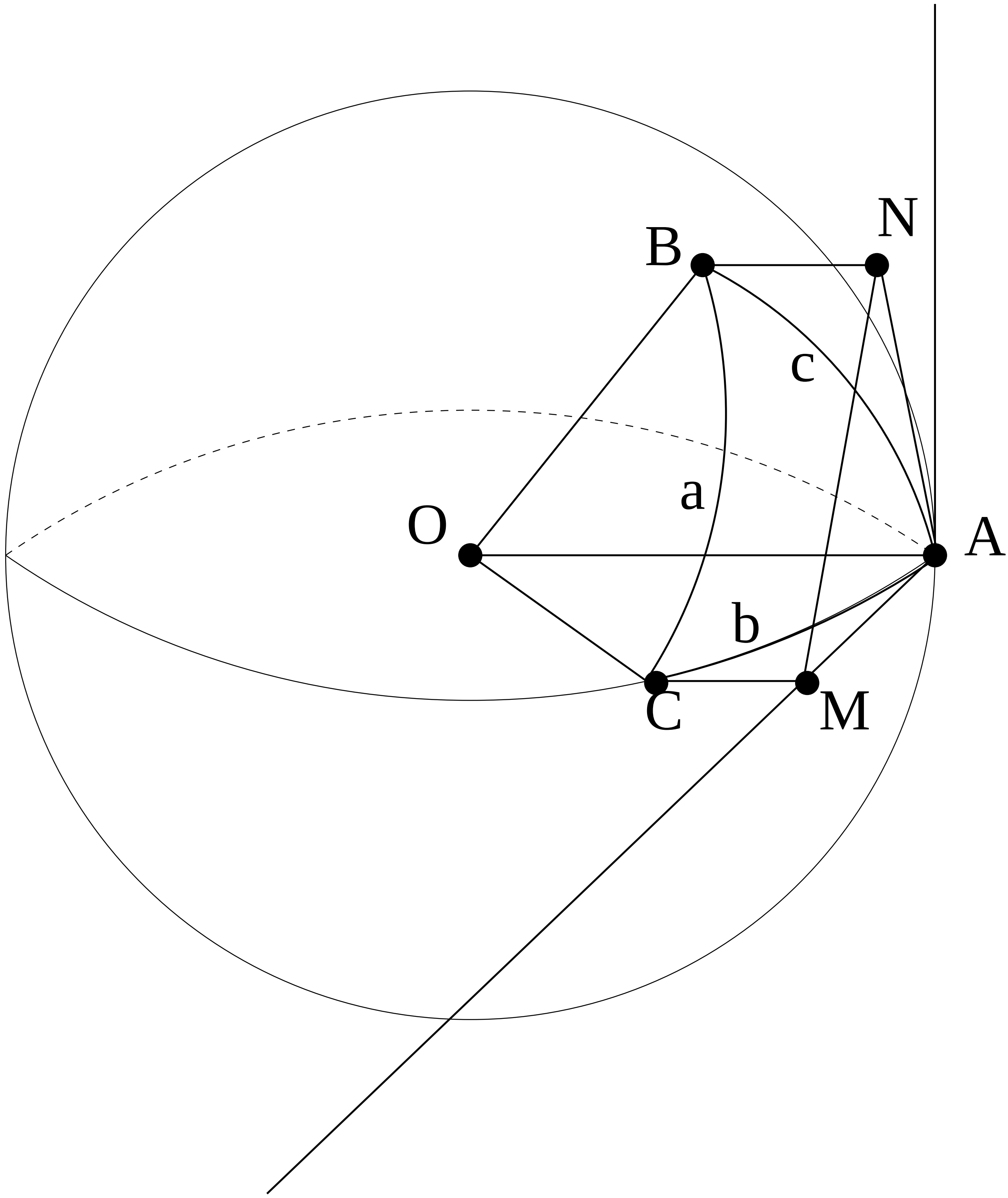


Figure 12.

Considérons le triangle sphérique $\triangle ABC$, situé sur une sphère de rayon 1. Il est clair que le plan tangent à la sphère au sommet $A$ contient les tangentes aux arcs $b$ et $c$ correspondant aux côtés du triangle sphérique. Les projections orthogonales des sommets $B$ (resp. $C$) sur ce plan seront dénotées par $N$ (resp. $M$), et la projection de $B$ (resp. $C$) sur la droite $OA$ est dénotée par $X$ (resp. $Y$).

Il est clair que l'angle sphérique $A = \widehat{BAC}$ correspond à l'angle $\widehat{MAN}$ dans le plan tangent, et il suit de la règle des cosinus dans le triangle $\triangle AMN$ que

$$MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cdot \cos A.$$

En outre, on voit immédiatement que

$$AM = CY = \sin b, \qquad AN = BX = \sin c.$$

Par conséquent,

$$MN^2 = \sin^2 b + \sin^2 c - 2 \sin b \sin c \cos A.$$

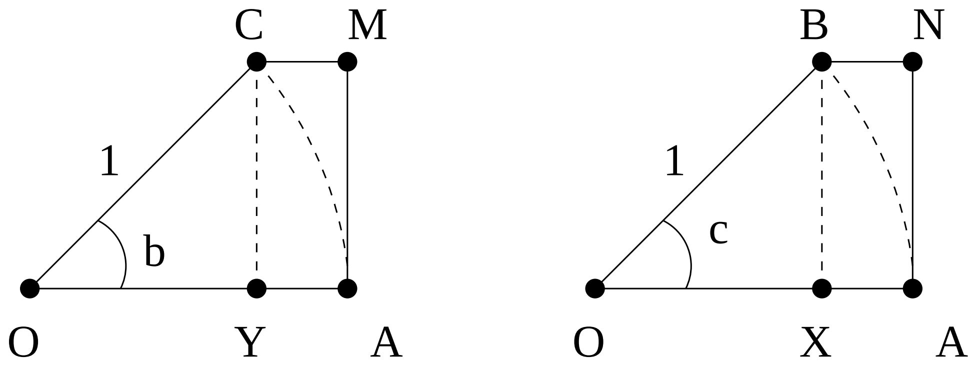


Figure 13.

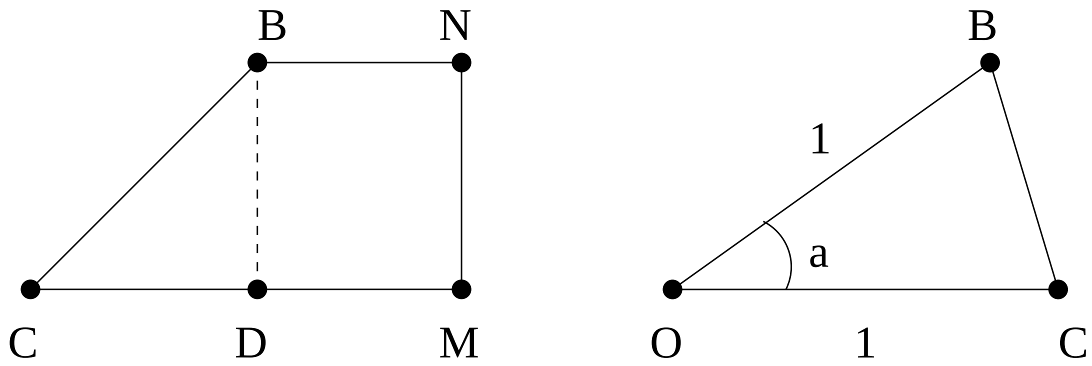


Figure 14.

Considérons maintenant le trapèze $BNMC$, et dénotons par $D$ la projection de $B$ sur le côté $CM$. Il suit du théorème de Pythagore que

$$MN^2 = BD^2 = CB^2 - CD^2.$$

Dans le triangle $\triangle OCB$, la règle des cosinus montre que

$$\begin{aligned} CB^2 &= OB^2 + OC^2 - 2OB \cdot OC \cos a \\ &= 1 + 1 - 2\cos a \\ &= 2 - 2\cos a, \end{aligned}$$

et dans le trapèze $BNMC$ on a

$$\begin{aligned} CD &= CM - DM \\ &= CM - BN \\ &= AY - AX \\ &= (OA - OY) - (OA - OX) \\ &= (1 - \cos b) - (1 - \cos c) \\ &= \cos c - \cos b. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned} MN^2 &= (2 - 2\cos a) - (\cos c - \cos b)^2 \\ &= 2 - 2\cos a - \cos^2 c - \cos^2 b + 2\cos b \cos c. \end{aligned}$$

Comparaison des deux expressions pour $MN^2$ nous montre alors que

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

En remplaçant les notations pour les sommets dans la démonstration ci-dessus, on obtient le théorème suivant, qui joue un rôle fondamental dans la suite de ce chapitre.

**Théorème 1.** *(Première règle des cosinus) Dans un triangle sphérique $\triangle ABC$ quelconque,*

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B, \\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C. \end{aligned} \tag{2}$$

**2. Deuxième règle des cosinus**

Considérons le triangle sphérique $\triangle ABC$, et appliquons la première règle des cosinus (2) sur le triangle polaire $\triangle A'B'C'$. On voit alors que

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

A l'aide de la formule (1), on déduit que

$$\begin{aligned} \cos a' &= -\cos A, & \cos A' &= -\cos a, \\ \cos b' &= -\cos B, & \sin b' &= \sin B, \\ \cos c' &= -\cos C, & \sin c' &= \sin C, \end{aligned}$$

et on conclut que

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

En remplaçant de nouveau les notations des sommets et côtés, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.** *(Deuxième règle des cosinus) Dans un triangle sphérique $\triangle ABC$ quelconque*

$$\begin{aligned} \cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B &= -\cos C \cos A + \sin C \sin A \cos b, \\ \cos C &= -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{aligned} \tag{3}$$

**3. Règle des sinus**

Considérons de nouveau la première règle des cosinus (2) dans un triangle sphérique $\triangle ABC$. On en déduit que

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right)^2 \\ &= \frac{\sin^2 b \sin^2 c - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a - \cos^2 b \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c} \\ &= \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c}. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

En échangeant les notations pour les éléments du triangle sphérique, on obtient

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c},$$

et comme tous les côtés et les angles d'un triangle sphérique mesurent entre 0 et $\pi$ radians, leur sinus est positif, impliquant le résultat suivant.

**Théorème 3.** *(Règle des sinus) Dans un triangle sphérique $\triangle ABC$ quelconque,*

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

### 4. Règle des cotangentes

Afin de dériver cette règle, on considère de nouveau la première règle des cosinus (2),

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B. \end{aligned}$$

En substituant la deuxième formule dans la première on obtient

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A,$$

d'où il suit que

$$\cos a (1 - \cos^2 c) = \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A.$$

A l'aide de la formule fondamentale de la trigonométrie, on obtient alors que

$$\cos a \sin^2 c = \sin a \sin c \cos c \cos B + \sin b \sin c \cos A,$$

et en divisant par $\sin a \sin c$ on voit alors que

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \frac{\sin b}{\sin a} \cos A.$$

Comme il suit de la règle des sinus que

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b},$$

on voit que

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \frac{\sin B}{\sin A} \cos A,$$

ce qui implique que

$$\operatorname{cotg} a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A.$$

En échangeant de nouveau les notations des angles et côtés, on obtient le résultat suivant.

**Théorème 4.** *(Règle des cotangentes) Dans un triangle sphérique quelconque,*

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \operatorname{cotg} A, \\
\operatorname{cotg} b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \operatorname{cotg} B, \\
\operatorname{cotg} a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \operatorname{cotg} A, \\
\operatorname{cotg} c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \operatorname{cotg} C, \\
\operatorname{cotg} b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B, \\
\operatorname{cotg} c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C.
\end{aligned}$$

# 4. Résolution d'un triangle rectangle

Un *triangle sphérique rectangle* est un triangle sphérique dont un des sommets mesure 90° ou $\frac{\pi}{2}$ radians.

### 1. Relations entre les éléments d'un triangle sphérique rectangle

Dans le cas d'un triangle sphérique rectangle, certaines des formules introduites ci-dessus seront simplifiées. Considérons un triangle sphérique $\triangle ABC$, et supposons que $A = \frac{\pi}{2}$. On voit alors que

$$\cos A = 0, \quad \sin A = 1, \quad \operatorname{cotg} A = 0,$$

et il suit de la première règle des cosinus que

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

et la deuxième règle des cosinus implique que

$$\begin{aligned}
\cos a &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C, \\
\cos B &= \sin C \cos b, \\
\cos C &= \sin B \cos c.
\end{aligned}$$

A l'aide de la règle des sinus, on obtient

$$\sin b = \sin a \sin B, \qquad \sin c = \sin a \sin C,$$

et la règle des cotangentes nous montre que

$$\begin{aligned}
\cos B &= \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} c, \text{ à condition que } \cos c \neq 0, \\
\cos C &= \operatorname{cotg} a \operatorname{tg} b, \text{ à condition que } \cos b \neq 0, \\
\sin c &= \operatorname{cotg} B \operatorname{tg} b, \text{ à condition que } \operatorname{cotg} b \neq 0, \\
\sin b &= \operatorname{cotg} C \operatorname{tg} c, \text{ à condition que } \operatorname{cotg} c \neq 0.
\end{aligned}$$

On conclut que, dans un triangle sphérique rectangle $\triangle ABC$,

$$
\begin{aligned}
\cos a &= \sin(\frac{\pi}{2} - b) \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - c),\\
&= \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C,\\
\cos B &= \sin C \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - b)\\
&= \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c),\\
\cos C &= \sin B \cdot \sin(\frac{\pi}{2} - c)\\
&= \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b),\\
\cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin a \cdot \sin B\\
&= \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c),\\
\cos(\frac{\pi}{2} - c) &= \sin a \cdot \sin C\\
&= \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b).
\end{aligned}
$$

La façon la plus facile permettant de retenir ces formules est l'usage d'un moyen mnémotechnique appelé la *règle de Neper* ou *règle de Mauduit*. A cet effet, on range les sommets $B$ et $C$ du triangle rectangle, le côté $a$ et les compléments $\frac{\pi}{2} - b$ et $\frac{\pi}{2} - c$ des côtés rectangles de la façon indiquée dans le diagramme Figure 15.

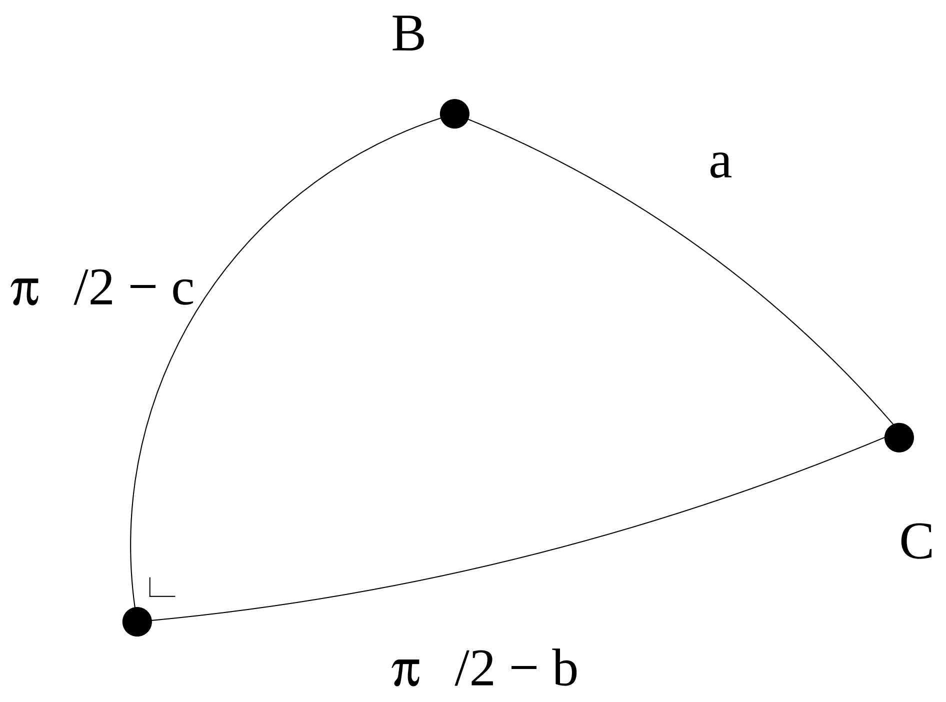


Figure 15. *La règle de Neper*

Les formules ci-dessus nous montrent que le *cosinus d'un élément du diagramme est égal au produit des cotangentes des éléments adjacents, et au produit des sinus des éléments opposés.*

**Remarque.** Supposons maintenant que, dans le triangle sphérique rectangle $\triangle ABC$ un des côtés $a$, $b$ ou $c$ mesure $\frac{\pi}{2}$. Il suit alors que

$$\cos a = \sin(\frac{\pi}{2} - b)\sin(\frac{\pi}{2} - c) = 0,$$

et, par conséquent, un deuxième côté doit mesurer $\frac{\pi}{2}$. En outre, on voit que dans ce cas, $\operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C = 0$, impliquant qu'un des sommets $B$ ou $C$ mesure également $\frac{\pi}{2}$.

**Remarque.** Considérons le triangle sphérique rectangle $\triangle ABC$, et supposons que aucun des côtés mesure $\frac{\pi}{2}$. En comparant les signes des facteurs dans l'expression

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

on déduit que le nombre de côtés obtus est toujours un nombre pair (0 ou 2), et s'il y a donc un côté obtus, il y en a un deuxième.

**Remarque.** Deux éléments (côtés ou angles) d'un triangle sphérique sont appelés *de même nature* s'ils sont tous les deux aigus, droits ou obtus. Comme

$$\sin B \geq 0, \qquad \sin C \geq 0,$$

il suit de

$$\cos B = \sin C \cos b, \qquad \cos C = \sin B \cos c,$$

que, dans un triangle sphérique rectangle, les côtés rectangles et les angles opposés sont toujours de même nature.

**Exemple 1.** Dans un triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$A = 90°, \qquad b = 69°15,3^{'} = 69°15^{'}18^{''}, \qquad c = 46°12,3^{'} = 46°12^{'}18^{''}.$$

Comme $b$ et $c$ sont aigus, $B$ et $C$ seront aigus, et le nombre de côtés obtus étant pair, $a$ est également aigu. Il suit de la règle de Neper que

$$\begin{aligned}\cos a &= \sin(\frac{\pi}{2} - b)\sin(\frac{\pi}{2} - c),\\ \cos(\frac{\pi}{2} - c) &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b),\\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c).\end{aligned}$$

On conclut que

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c,\\ \operatorname{tg} B &= \frac{\operatorname{tg} b}{\sin c},\\ \operatorname{tg} C &= \frac{\operatorname{tg} c}{\sin b},\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$a = 75°48'35'' = 75°48,6', \qquad B = 74°42'32'' = 74°42,5', \qquad C = 48°07'10'' = 48°7,2'.$$

**Exemple 2.** Dans le triangle rectangle $\triangle ABC$ on a

$$A = 90°, \qquad a = 109°15,8' = 109°15'48'', \qquad b = 37°9,3' = 37°9'18''.$$

Comme $b$ est aigu, $B$ est également aigu. Le côté $a$ étant obtus, il suit que $c$ est obtus, et par conséquent $C$ sera obtus. En outre, il suit de la règle de Neper que

$$\begin{aligned} \cos a &= \sin(\frac{\pi}{2} - c)\sin(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos C &= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin B \sin a, \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} \cos c &= \frac{\cos a}{\cos b}, \\ \cos C &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a}, \\ \sin B &= \frac{\sin b}{\sin a}. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$c = 114°27'8'' = 114°27,1', \qquad C = 105°21'26'' = 105°21,4', \qquad B = 39°46'36'' = 39°46,6'.$$

**Exemple 3.** Dans le triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$A = 90°, \qquad b = 106°13,8' = 106°13'48'', \qquad C = 38°45,4' = 38°45'24''.$$

Comme $b$ est obtus, le sommet $B$ doit être obtus. Le sommet $C$ étant aigu, le côté $c$ sera également aigu, et $a$ est donc obtus. La règle de Neper nous montre que

$$\begin{aligned} \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c), \\ \cos B &= \sin C \sin(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos C &= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b), \end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \sin b \operatorname{tg} C, \\ \cos B &= \sin C \cos b, \\ \operatorname{tg} a &= \frac{\operatorname{tg} b}{\cos C}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$c = 37°37'28'' = 37°37,5', \qquad B = 100°4'36'' = 100°4,6', \qquad a = 102°47'22'' = 102°47,4'.$$

**Exemple 4.** Dans le triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$A = 90°, \qquad b = 138°46,4' = 138°46'24'', \qquad B = 125°10,6' = 125°10'36''.$$

Comme $b$ est obtus, un des autres côtés du triangle doit être obtus. Si $a$ est aigu, $c$ et $C$ seront obtus, si $a$ est obtus, $c$ et $C$ doivent être aigus. La règle de Neper implique que

$$\begin{aligned} \cos B &= \sin C \sin(\frac{\pi}{2} - b), \\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin a \sin B, \\ \cos(\frac{\pi}{2} - c) &= \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - b), \end{aligned}$$

et il suit que

$$\begin{aligned} \sin C &= \frac{\cos B}{\cos b}, \\ \sin a &= \frac{\sin b}{\sin B}, \\ \sin c &= \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} B}. \end{aligned}$$

En prenant en compte les conditions mentionnées ci-dessus, on obtient deux solutions acceptables,

$$a = 53°44'4'' = 53°44,1', \qquad c = 141°51'33'' = 141°51,5', \qquad C = 130°0'21'' = 130°0,3',$$

et

$$a = 126°15'56'' = 126°15,9', \qquad c = 38°8'27'' = 38°8,5', \qquad C = 49°59'39'' = 49°59,7'.$$

**Exemple 5.** Dans le triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$A = 90°, \qquad a = 72°12,5' = 72°12'30'', \qquad B = 156°17,2' = 156°17'12''.$$

Le sommet $B$ étant obtus, le côté $b$ doit être obtus, et $a$ étant aigu, $c$ et $C$ seront obtus. Il suit de la règle de Neper que

$$\begin{aligned} \cos B &= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - c), \\ \cos a &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} B, \\ \cos(\frac{\pi}{2} - b) &= \sin B \sin a, \end{aligned}$$

et on déduit que

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} c &= \cos B \operatorname{tg} a, \\ \operatorname{tg} C &= \frac{1}{\cos a \operatorname{tg} B}, \\ \sin b &= \sin B \sin a. \end{aligned}$$

Comme $b$ est obtus, on obtient

$$c = 109°18'56'' = 109°18,9', \qquad C = 97°38'39'' = 97°38,7', \qquad b = 157°29'5'' = 157°29,1'.$$

**Exemple 6.** Dans un triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$A = 90°, \qquad B = 64°35,4' = 64°35'24'', \qquad C = 119°41,6' = 119°41'36''.$$

Le sommet $B$ étant aigu et $C$ étant obtus, on conclut que $b$ est aigu et $c$ est obtus, et par conséquent $a$ est également obtus. La règle de Neper montre que

$$\begin{aligned}\cos a &= \operatorname{cotg} C \operatorname{cotg} B,\\ \cos B &= \sin C \sin(\frac{\pi}{2} - b),\\ \cos C &= \sin B \sin(\frac{\pi}{2} - c),\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned}\cos a &= \frac{1}{\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C},\\ \cos b &= \frac{\cos B}{\sin C},\\ \cos c &= \frac{\cos C}{\sin B}.\end{aligned}$$

En résolvant ces équations, on obtient la solution

$$a = 105°43'2'' = 105°43,0', \qquad b = 60°23'57'' = 60°23,9', \qquad c = 123°15'29'' = 123°15,5'.$$

# 5. Résolution d'un triangle sphérique oblique

Pour la résolution d'un triangle sphérique oblique, on se limite à une étude de deux cas spécifiques, qui jouent un rôle important dans le cadre de la navigation.

### 1. Trois côtés du triangle sont connus

Quand les trois côtés $a$, $b$ et $c$ du triangle sphérique $\triangle ABC$ sont connus, on peut utiliser la première règle des cosinus

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,\\ \cos b &= \cos c \cos a + \sin c \sin a \cos B,\\ \cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},\\ \cos B &= \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},\\ \cos C &= \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b}.\end{aligned}$$

**Exemple 7.** Dans le triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$a = 69°23,6' = 69°23'36'', \qquad b = 57°51,3' = 57°51'18'', \qquad c = 39°39,7' = 39°39'42''.$$

Il suit alors de la première règle des cosinus que

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$
$$\cos B = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$
$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b},$$

et on en déduit que

$$A = 96°7^{'}24^{''} = 96°7,4^{'}, \qquad B = 64°4^{'}55^{''} = 64°4,9^{'}, \qquad C = 42°41^{'}12^{''} = 64°41,2^{'}.$$

**2. Deux côtés et l'angle inclus connus**

Quand les deux côtés $b$ et $c$, et l'angle inclus $A$ du triangle sphérique $\triangle ABC$ sont connus, on déduit de la première règle des cosinus que

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

permettant la détermination du troisième côté.

En outre, la règle des cotangentes implique que

$$\operatorname{cotg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B,$$
$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C,$$

d'où il suit que

$$\operatorname{cotg} B = \frac{\operatorname{cotg} b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A},$$
$$\operatorname{cotg} C = \frac{\operatorname{cotg} c \sin b - \cos b \cos A}{\sin A}.$$

**Exemple 8.** Dans le triangle sphérique $\triangle ABC$ on a

$$A = 103°44,8^{'} = 103°44^{'}48^{''}, \qquad b = 98°33,8^{'} = 98°33^{'}48^{''}, \qquad c = 64°12,2^{'} = 64°12^{'}12^{''}.$$

Il suit alors de la première règle des cosinus que

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et, par conséquent,

$$a = 106°2^{'}36^{''} = 106°2,6^{'}.$$

La règle des cotangentes montre que

$$\operatorname{cotg} b \sin c = \cos c \cos A + \sin A \operatorname{cotg} B,$$
$$\operatorname{cotg} c \sin b = \cos b \cos A + \sin A \operatorname{cotg} C,$$

d'où il suit que

$$\operatorname{tg} B = \frac{\sin A}{\frac{\sin c}{\operatorname{tg} b} - \cos c \cos A},$$
$$\operatorname{tg} C = \frac{\sin A}{\frac{\sin b}{\operatorname{tg} c} - \cos b \cos A},$$

et on conclut que

$$B = 91°53^{'}48^{''} = 91°53,8^{'}, \qquad C = 65°30^{'}18^{''} = 65°30,3^{'}.$$