Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Toegepaste en Exacte Wetenschappen

Calcul différentiel et intégral

Peter Bueken

HZS-OE5-NW141
Premier Bachelor Sciences Nautiques
Version 14.0
19 Septembre 2014

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions d'une variable réelle

1. Fonctions réelles

Une *fonction réelle* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ (souvent représentée par $y = f(x)$) est une prescription qui associe à un nombre réel x au maximum un nombre réel $f(x)$. Le nombre $f(x)$ (s'il existe) s'appelle l'*image* du nombre x sous la fonction f. L'ensemble de tous les nombres réels x qui ont une image sous la fonction f est appelé le *domaine de définition* ou le *domaine* de la fonction f, et cet ensemble est dénoté $\mathrm{dom}(f)$.

Exemple 1. La fonction $y = x^2$ envoie le nombre réel x à son carré x^2. L'image de 0 sous cette fonction est 0, l'image de 2 est 4. Le domaine de cette fonction est l'ensemble de tous les nombres réels, $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Exemple 2. La fonction $y = \sqrt{x}$ associe à un nombre x sa racine carrée (positive). L'image de 0 sous cette fonction est 0, l'image de 9 est 3. Il est évident que cette fonction n'est définie que pour les nombres réels positifs, c'est-à-dire $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.

Supposons que $y = f(x)$ est une fonction réelle. Si on calcule, pour chaque point $x \in \mathrm{dom}(f)$, l'image $f(x)$ sous la fonction f, on peut construire une représentation graphique de la fonction comme l'ensemble de tous les points $(x, f(x))$ dans le plan. Cette figure s'appelle le *graphique* de la fonction f.

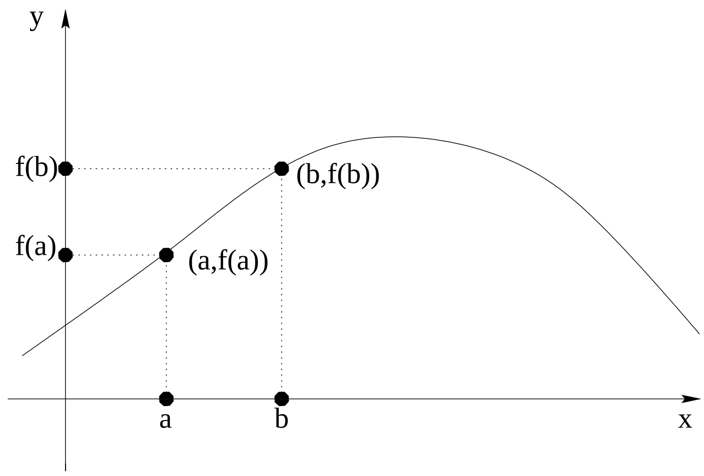

Figure 1. *Graphique d'une fonction $y = f(x)$.*

2. Fonctions élémentaires et leur représentation graphique

Dans ce paragraphe on présente une collection de fonctions réelles qui joueront un rôle important dans la suite de ce cours. On construit le graphique de quelques fonctions et on étudie leurs propriétés importantes.

1. Fonctions constantes

Définition 1. *Supposons que c est un nombre réel arbitraire. La fonction $y = c$, qui associe à chaque nombre réel x le nombre c est appelée une fonction constante.*

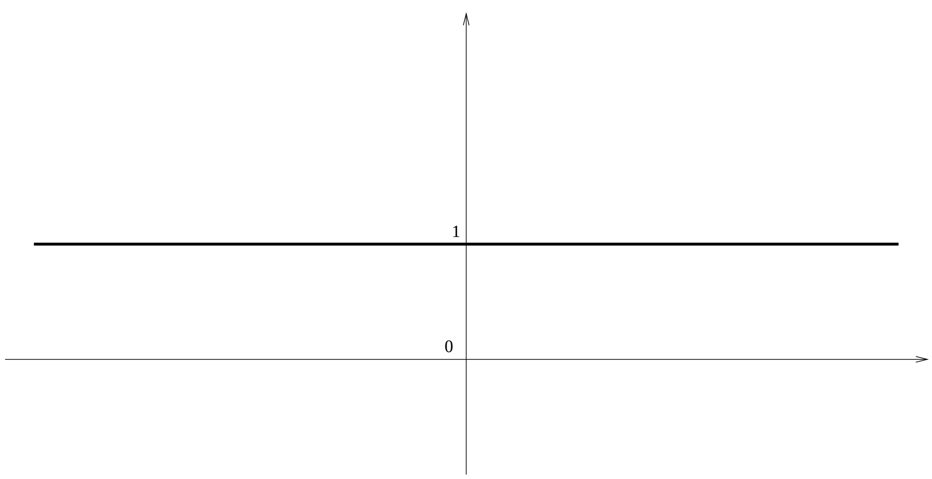

Figure 2. *Graphique de la fonction constante $y = 1$.*

2. Les fonctions puissance

Supposons que x est un nombre réel arbitraire et n un nombre naturel strictement positif. Alors on définit la n-ième puissance de x comme le produit de n facteurs égaux x,

$$x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \quad (n \text{ facteurs}).$$

La première puissance d'un nombre est égal à ce nombre même, $x^1 = x$. Le nombre n est appelé l'*exposant*, x s'appelle le *nombre de base.*

Exemple 3. La deuxième puissance ou le *carré* de 5 est $5^2 = 5 \cdot 5 = 25$. La 5-ième puissance de 2 est $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$.

La définition de puissances peut facilement être généralisée aux cas où l'exponent n'est pas un nombre naturel strictement positif mais un nombre réel arbitraire a.

D'abord, si $a = 0$ on définit $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_0$. Pour un nombre rationnel positif $a = \frac{p}{q}$, où p et q sont des nombres naturels, on dit que

$$x^a = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p},$$

si cette racine existe.

Exemple 4. La définition nous montre que

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2, \qquad 4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = 8, \qquad (-8)^{\frac{5}{3}} = \sqrt[3]{(-8)^5} = -32.$$

D'autre part, $(-4)^{\frac{1}{2}}$ n'est pas défini parce qu'on ne sait pas calculer $\sqrt{-4}$.

Pour définir les puissances aux exponents négatifs, on dit que

$$x^{-a} = \frac{1}{x^a},$$

à condition que ce quotient existe.

Exemple 5. Par définition,

$$2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \qquad (-8)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{4},$$

mais 0^{-2} et $(-4)^{-\frac{1}{2}}$ ne sont pas définis.

On peut facilement démontrer que, pour tous les nombres x, a, b, on a

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad (x^a)^b = (x^b)^a = x^{ab},$$

à condition que toutes ces expressions existent.

En utilisant la définition de puissances, on peut maintenant introduire quelques familles de fonctions réelles élémentaires: les fonctions puissance, les fonctions exponentielles et les fonctions logarithmiques.

Définition 2. *Supposons que a est un nombre réel arbitraire. La fonction réelle $y = x^a$ est appelée une fonction puissance. Si on met $n = 1$, on obtient la fonction identique $y = x$.*

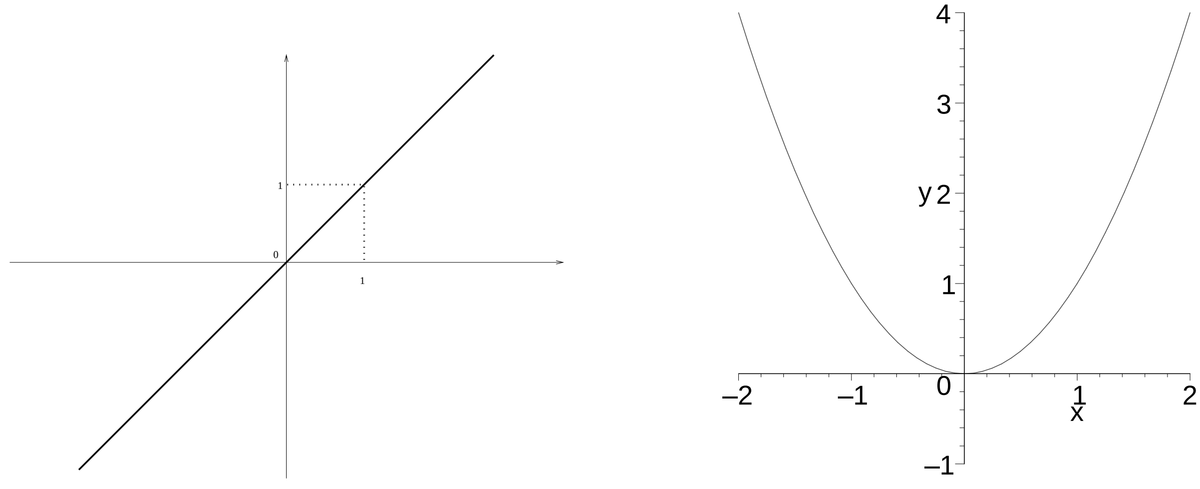

Figure 3. *Graphiques de la fonction identique $y = x$ et de la fonction quadratique $y = x^2$.*

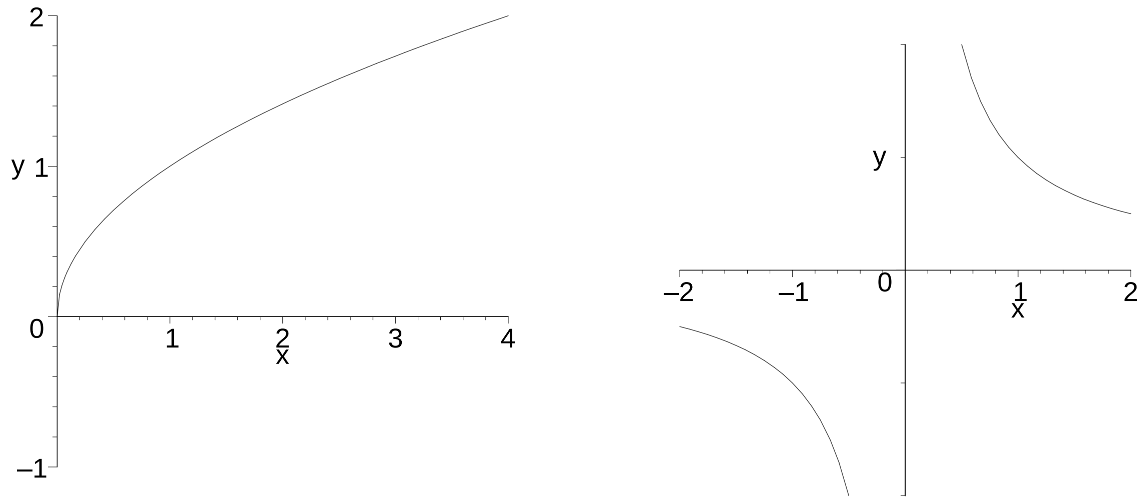

Figure 4. *Graphiques des fonctions $y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ et $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.*

3. Fonctions exponentielles

Définition 3. *Supposons que a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. La fonction $y = a^x$ est appelée la fonction exponentielle avec nombre de base a.*

Les fonctions exponentielles apparaissent souvent dans l'étude de certains phénomènes où, dans un intervalle de temps fixé, une quantité donnée est augmentée ou diminuée par un facteur constant, comme par exemple le calcul de l'accroissement d'un capital placé à intérêt composé ou d'une population bactérielle.

Exemple 6. Supposons qu'on a un capital initial K_0 qu'on place à un intérêt annuel p. Après un an, on reçoit alors un intérêt $K_0 p$ qu'on ajoute au capital original. Le capital est donc $K_0 + K_0 p = K_0(1 + p)$. Après une autre année, le capital devient $K_0(1 + p) + K_0(1 + p)p = K_0(1 + p)^2$. En continuant ce calcul, on voit que le capital est donné, en fonction du temps t, par la fonction

$$K(n) = K_0(1 + p)^n.$$

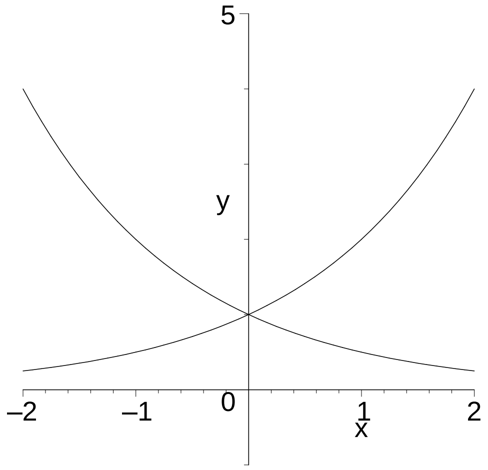

Figure 5. *Graphiques des fonctions exponentielles $y = 2^x$ et $y = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.*

4. Fonctions logarithmiques

Supposons de nouveau que a est un nombre réel strictement positif et différent de 1. Le *a-logarithme* d'un nombre b, $\log_a b$, est défini comme le nombre c tel que $a^c = b$, si ce nombre existe. Il est clair que

$$a^{\log_a b} = b = \log_a a^b.$$

Exemple 7. On voit immédiatement que

$$\log_{10} 1000 = 3, \quad \log_2 32 = 5, \quad \log_3 81 = 4.$$

Par contre, $\log_2(-4)$ et $\log_{10} 0$ ne sont pas définis.

Dans le Chapitre 2, on introduira un nombre réel (irrationnel) spécial, qu'on dénotera $e \sim 2.7182818$. Ce nombre jouera un rôle particulier dans le calcul différentiel. Le logarithme, dont le nombre de base est égal à ce nombre e, est appelé le *logarithme naturel* ou *logarithme népérien*, et on le dénote par le symbole spécial ln,

$$\log_e x = \ln x.$$

Théorème 1. *Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1, et x et y deux nombres réels arbitraires. Si toutes les expressions impliquées existent, on a*

$$\begin{aligned}
\log_a xy &= \log_a x + \log_a y,\\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y,\\
\log_a x^y &= y \log_a x.
\end{aligned}$$

Démonstration. On sait que

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

et par conséquent

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

De la même façon,

$$a^{\log_a \frac{x}{y}} = \frac{x}{y} = a^{\log_a x} a^{-\log_a y} = a^{\log_a x - \log_a y},$$

et on sait donc que

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Finalement,

$$a^{\log_a x^y} = x^y = \left(a^{\log_a x}\right)^y = a^{y \log_a x},$$

et on voit que

$$\log_a x^y = y \log_a x.$$

∎

Théorème 2. *Soient a et b deux nombres réels strictement positifs et différents de 1. Alors on a*

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

Démonstration. Par définition, on sait que

$$a^{\log_a b} = b.$$

Si on calcule le b-logarithme des deux membres de cette égalité, on obtient

$$\log_b a^{\log_a b} = 1.$$

Il suit du Théorème 1 que

$$\log_a b \log_b a = 1,$$

et, par conséquent,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$$

∎

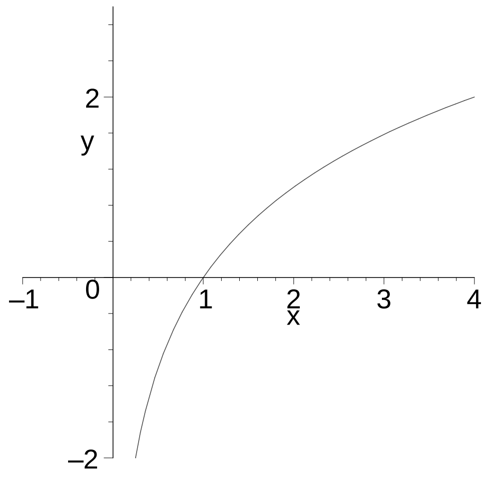

Figure 6. *Graphique de la fonction logarithmique* $y = \log_2(x)$*.*

Définition 4. *Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. La fonction $y = \log_a(x)$ est appelée la fonction logarithmique* avec nombre de base *a.*

5. Fonctions trigonométriques

Définition 5. *Les fonctions*

$$y = \sin(x), \quad y = \cos(x), \quad y = \mathrm{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad y = \mathrm{cotg}(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}(x)},$$

sont appelées les fonctions trigonométriques élémentaires.

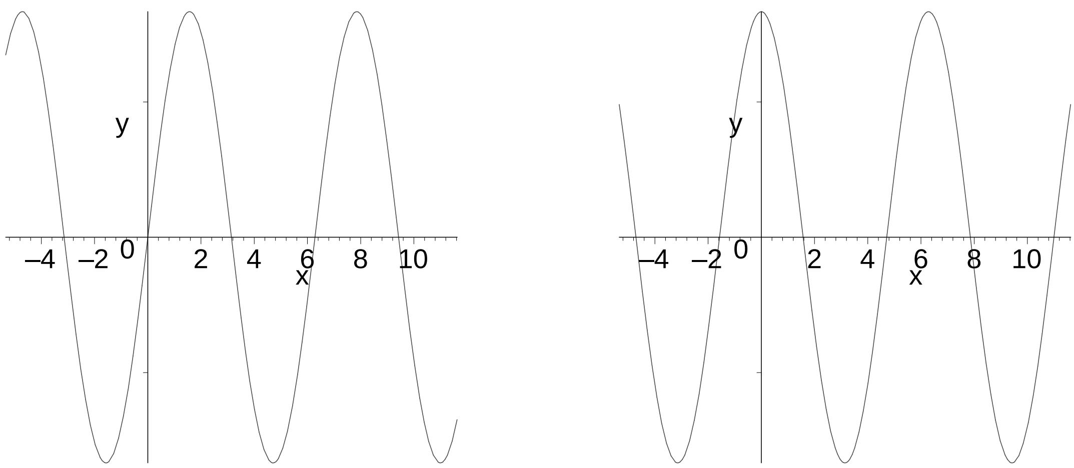

Figure 7. *Graphiques des fonctions* $y = \sin(x)$ *et* $y = \cos(x)$*.*

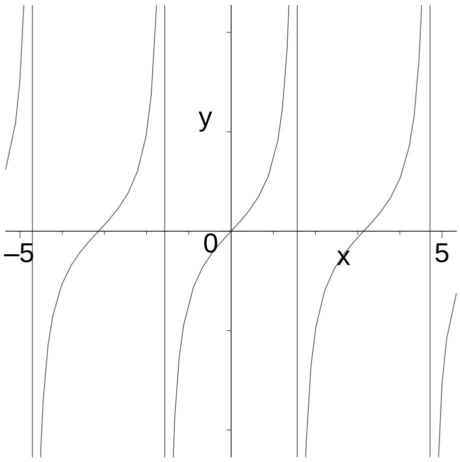

Figure 8. *Graphiques des fonctions* $y = \mathrm{tg}(x)$ *et* $y = \mathrm{cotg}(x)$.

6. Fonctions cyclométriques

L'*arcsinus* $\arcsin(a)$ d'un nombre réel a est l'angle α tel que $\sin(\alpha) = a$. Il est clair (Figure 9) que l'arcsinus n'est défini que pour les nombres dans l'intervalle $[-1, 1]$. En outre, cet angle α n'est pas unique. En effet, on sait que

$$\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha + 2\pi n) = \sin(\pi - \alpha + 2\pi n),$$

pour un nombre $n \in \mathbb{Z}$ arbitraire, et on a donc une suite infinie d'angles dont le sinus est égal à un nombre donné $a \in [-1, 1]$. Pour éliminer cette indétermination dans la définition de l'arcsinus, on choisit l'angle α dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Avec cette réstriction, l'arcsinus d'un nombre a est déterminé uniquement.

Exemple 8. La définition nous montre que

$$\arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}, \quad \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\frac{\pi}{3}, \quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

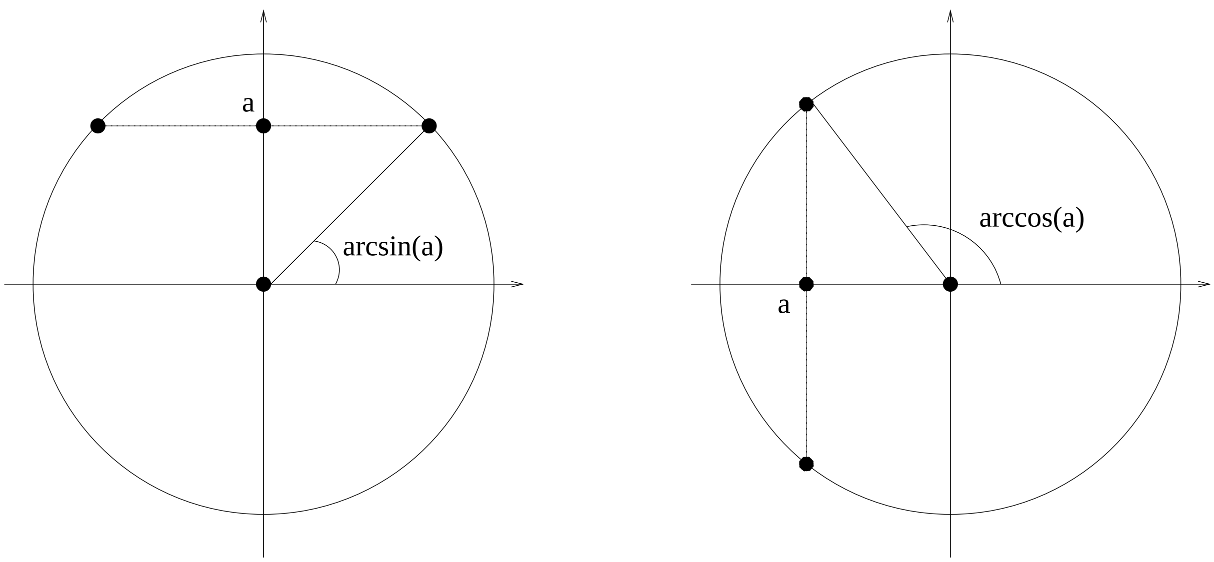

Figure 9. *La construction de* $\arcsin(a)$ *et* $\arccos(a)$.

Par le même procédé, on définit l'*arccosinus* $\arccos(a)$ d'un nombre réel a, où maintenant les valeurs possibles de l'angle α sont réstreintes à l'intervalle $[0, \pi]$. Pour la définition de l'*arctangente* $\mathrm{arctg}(x)$ d'un nombre on se réstreint à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, tandis que pour l'*arccotangente* $\mathrm{arccotg}(a)$ les valeurs possibles sont réstreintes à l'intervalle $]0, \pi[$. Il faut remarquer que l'arctangente et l'arccotangente sont définies pour un nombre réel arbitraire $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 9.

$$\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}, \quad \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3}, \quad \mathrm{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}, \quad \mathrm{arccotg}(-1) = \frac{3\pi}{4}.$$

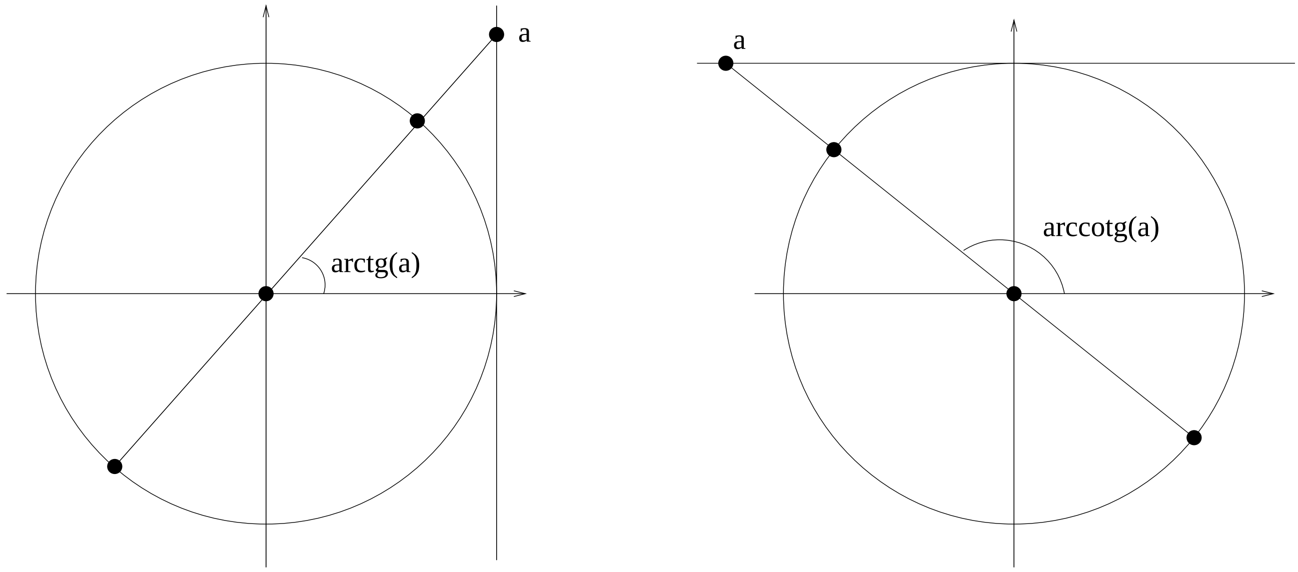

Figure 10. *La construction de* $\mathrm{arctg}(a)$ *et* $\mathrm{arccotg}(a)$.

Définition 6. *Les fonctions*

$$y = \arcsin(x), \quad y = \arccos(x), \quad y = \mathrm{arctg}(x), \quad y = \mathrm{arccotg}(x),$$

sont appelées les fonctions cyclometriques élémentaires.

3. Constructions avec les fonctions réelles

Considérons deux fonctions réelles données $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto g(x)$. On peut alors construire une nouvelle fonction $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, qui associe à un nombre donné x la somme de $f(x)$ et $g(x)$ (si ces images existent). Cette fonction réelle est appelée la *somme* des deux fonctions f et g. De la même façon, on définit la *différence* $f - g$, le *produit* $f \cdot g$ et le *quotient* $\frac{f}{g}$ de deux fonctions f en g, et la n-ième puissance f^n et la n-ième racine $\sqrt[n]{f}$ d'une fonction réelle f. La fonction

$$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

s'appelle la *composition* ("g après f") des fonctions f et g.

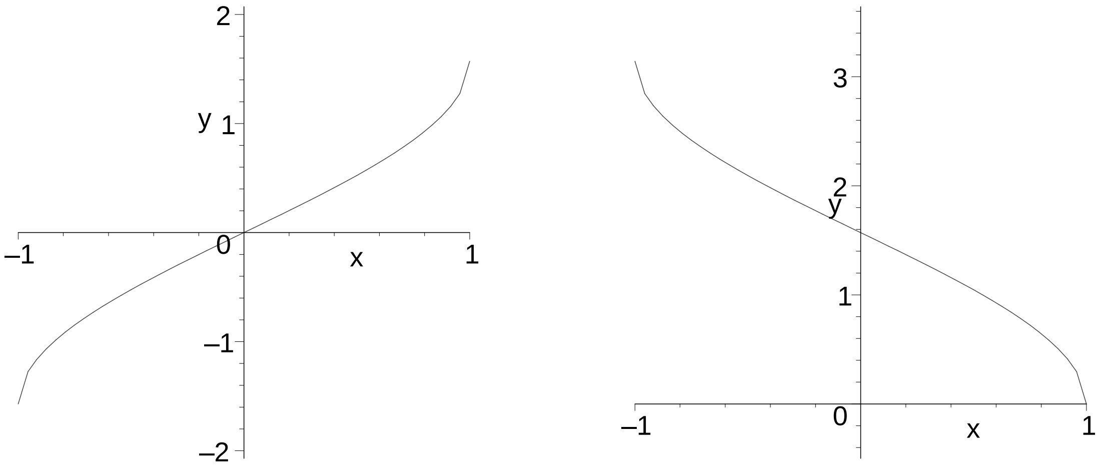

Figure 11. *Graphiques des fonctions cyclométriques* $y = \arcsin(x)$ *et* $y = \arccos(x)$.

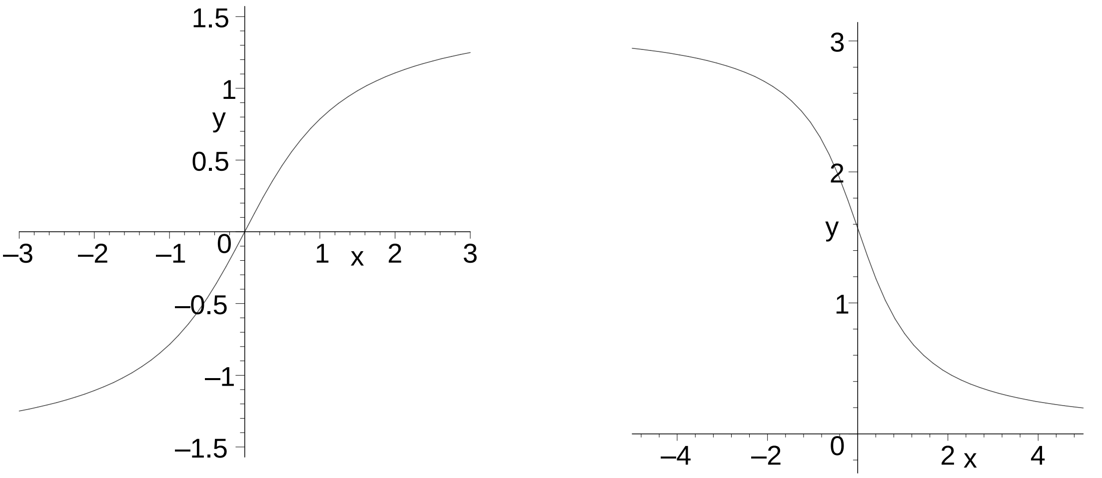

Figure 12. *Graphiques des fonctions cyclométriques* $y = \operatorname{arctg}(x)$ *et* $y = \operatorname{arccotg}(x)$.

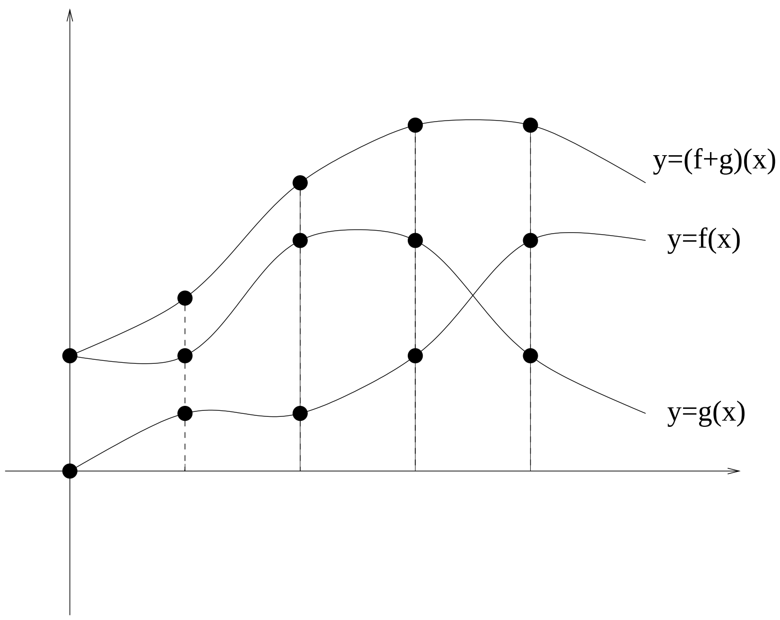

Figure 13. *La somme* $f + g$ *de deux fonctions* f *et* g.

Il est évident que, en utilisant les fonctions élémentaires et ces constructions, nous pouvons définir un grand nombre de nouvelles fonctions réelles.

Exemple 10. Soit $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sin(x)$, alors on a

$$\begin{aligned}
&(f+g)(x) = x^2 + \sin(x),\\
&(f-g)(x) = x^2 - \sin(x),\\
&(f \cdot g)(x) = x^2 \sin(x),\\
&\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{\sin(x)},\\
&(g \circ f)(x) = g(x^2) = \sin(x^2),\\
&(f \circ g)(x) = f(\sin(x)) = \sin^2(x).
\end{aligned}$$

D'autre part, cette technique nous permet aussi de décomposer une fonction compliquée $y = f(x)$ en un nombre de fonctions élémentaires. Dans la suite de ce cours, on utilisera cette décomposition pour simplifier certains calculs.

Exemple 11. La fonction

$$f(x) = \sin(3x^2 + 1)$$

est une composition de la fonction $y = \sin(x)$ avec la fonction

$$y = 3x^2 + 1.$$

Cette dernière fonction est la somme de la fonction constante $y = 1$ et la fonction

$$y = 3x^2,$$

qui est le produit de la fonction constante $y = 3$ et la fonction quadratique $y = x^2$.

4. Suites de nombres réels

Une *suite de nombres* est une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : n \mapsto f(n)$ (souvent dénotée par $x_n = f(n)$) des nombres naturels aux nombres réels, c'est-à-dire une préscription qui associe à un nombre naturel n au maximum un nombre réel $f(n)$. Nous supposerons toujours que f n'est indéfinie que pour un nombre fini de nombres naturels n, et que par conséquent on peut toujours calculer l'image de tout nombre naturel suffisamment grand. Une suite de nombres réels $x_n = f(n)$ est souvent représentée par la suite des images

$$x_0 = f(0), x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots.$$

Exemple 12. La suite $x_n = \frac{1}{n}$ associe au nombre naturel $n \neq 0$ son réciproque. Les éléments consécutifs de cette suite sont

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \ldots.$$

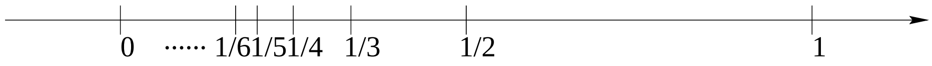

Figure 14. *Représentation graphique de la suite* $x_n = \frac{1}{n}$.

Exemple 13. Les éléments de la suite $x_n = 2 - \frac{1}{10^n}$ sont donnés par

$$1, 1.9, 1.99, 1.999, \ldots.$$

Exemple 14. La suite $x_n = n^2$ prend la forme

$$0, 1, 4, 9, 16, \ldots.$$

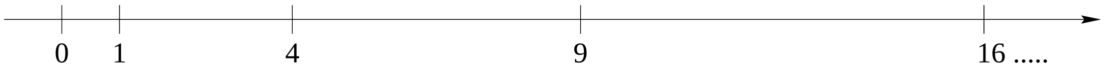

Figure 15. *Représentation graphique de la suite* $x_n = n^2$.

Exemple 15. La suite $x_n = (-1)^n$ est donnée par

$$1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots.$$

Il est évident que les valeurs consécutives de la suite $x_n = 1/n$ se rapprochent de plus en plus au nombre réel 0 (sans que la suite atteint ce nombre). On peut formuler ceci de façon plus précise comme suit: pour n'importe quel degré de précision (c'est-à-dire une déviation maximale tolérée ϵ), on peut trouver un point dans la suite (un nombre naturel N) à partir duquel *tous* les éléments de la suite (donc tous les x_n pour $n \geq N$) s'écartent moins de 0 que ϵ. Par exemple, si $\epsilon = 0.00001$, on sait que, pour tous les x_n avec $n \geq 100001$, la distance entre x_n et 0 est moins que ϵ. On dit que la suite $x_n = \frac{1}{n}$ *tend vers* 0, ou que la *limite de la suite* est égale à 0, et on le dénote par $\frac{1}{n} \to 0$.

En général, on dira qu'une suite x_n tend vers un nombre réel a, ou que a est la limite de la suite, si pour chaque valeur $\epsilon > 0$ on peut trouver un nombre naturel N tel que $|x_n - a| < \epsilon$ pour tout $n \geq N$. En formules, cette définition s'écrit comme suit: $x_n \to a$ si

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : |x_n - a| < \epsilon \text{ pour tout } n \geq N.$$

Les valeurs consécutives de la suite $x_n = n^2$ deviennent toujours plus grandes, dans le sens que, pour n'importe quel nombre réel $M \in \mathbb{R}$ (arbitrairement large), il existe un point dans la suite (un nombre naturel N) à partir duquel les valeurs de x_n sont plus grandes que M. En effet, si on prend $M = 1000000$, tous les valeurs de $x_n = n^2$ pour $n > 1000$ auront une valeur plus grande que M. Dans ce cas, on dit que la suite tend vers l'infini, ou que la limite de la suite est infinie. Ceci est dénoté $x_n \to +\infty$. En formules : $x_n \to +\infty$ si

$$\forall M \in \mathbb{R} \, \exists N \in \mathbb{N} : x_n > M \text{ pour tout } n \geq N.$$

De la même façon on dit qu'une suite tend vers $-\infty$, ou a $-\infty$ pour limite, si

$$\forall M \in \mathbb{R} \, \exists N \in \mathbb{N} : x_n < M \text{ pour tout } n \geq N.$$

Chapitre 2

Limites

1. Définitions

Il est clair que le nombre réel $x = 0$ n'appartient pas au domaine de définition de la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Comme tout autre nombre réel x appartient au domaine de définition de cette fonction, on peut étudier le comportement de la fonction aux environs du point 0. A cet effet, on choisit une suite arbitraire de nombres réels x_n qui tend vers 0 (sans jamais atteindre le point 0), comme par exemple $x_n = \frac{1}{10^n}$. Si on calcule les images $f(x_n)$ des points consécutifs de la suite sous la fonction f, on obtient les résultats suivants:

n	x_n	$f(x_n)$
0	1	0.8414709
1	$\frac{1}{10}$	0.99833417
2	$\frac{1}{100}$	0.99998333
3	$\frac{1}{1000}$	0.99999983
4	$\frac{1}{10000}$	0.99999999
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

On conclut que la suite des images $f(x_n)$ tend vers le nombre réel 1, $f(x_n) \to 1$. Si on choisit n'importe quelle autre suite de nombres x_n tendant vers 0, on obtient le même résultat pour la suite des images $f(x_n)$. Quoique la fonction f ne soit pas définie pour $x = 0$, on peut tirer une conclusion sur le comportement de la fonction aux environs du point 0: si x se rapproche de 0, son image $f(x)$ se rapproche de 1. Nous dirons que la limite de la fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$, pour x tendant vers 0, est égale à 1, et on le dénote par

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

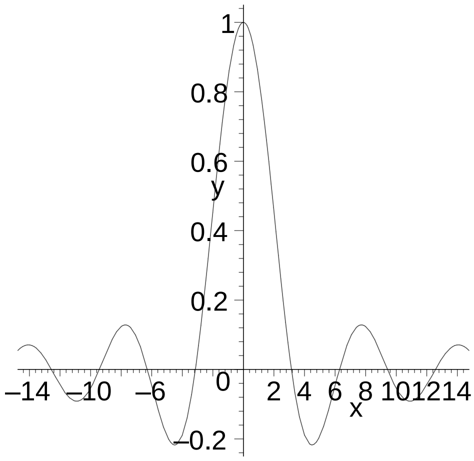

Figure 16. *Graphique de la fonction* $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.

Définition 1. *La limite d'une fonction* $y = f(x)$*, pour* x *tendant vers* $a \in \mathbb{R}$*, est égale à* $b \in \mathbb{R}$*,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = b,$$

si, pour chaque suite de nombres x_n *qui tend vers* a *(sans jamais atteindre* a*), la suite des images* $f(x_n)$ *tend vers* b*.*

Considérons maintenant la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Comme avant, le nombre réel 0 n'appartient pas au domaine de définition de cette fonction, qui est définie pour tout autre nombre réel x. Afin d'étudier le comportement de cette fonction aux environs du point $x = 0$, on choisit de nouveau une suite de nombres réels qui tend vers 0 (sans jamais atteindre ce point), comme par exemple $x_n = \frac{1}{n}$. On peut facilement vérifier que la suite des images $f(x_n)$ d'une telle suite x_n tend vers $+\infty$. On dit que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

Définition 2. *La limite de la fonction* $y = f(x)$*, pour* x *tendant vers* a*, est infinie,*

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \qquad (\textit{ respectivement } -\infty),$$

si pour chaque suite de nombres x_n *qui tend vers* a*, la suite des images* $f(x_n)$ *tend vers* $+\infty$ *(respectivement* $-\infty$*).*

Afin d'étudier le comportement de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ pour des valeurs très grandes de x, on choisit maintenant une suite de nombres réels x_n qui tend vers $+\infty$, comme par exemple $x_n = n$. Si on calcule les images des éléments de cette suite sous la fonction f, on voit que cette suite d'images tend vers 0. Choisissant n'importe quelle autre suite tendant vers $+\infty$, on observera le même comportement pour la suite des images. On dit alors que la limite de $f(x) = \frac{1}{x}$, pour x tendant vers $+\infty$, est égale à 0, et on le dénote

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Définition 3. *Si, pour chaque suite de nombres x_n qui tend vers $+\infty$, la suite des images $f(x_n)$ sous la fonction f tend vers le nombre b, on dit que*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b.$$

Si la fonction présente ce même comportement pour toute suite tendant vers $-\infty$ on dit que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = b.$$

Remarque. A l'aide des définitions ci-dessus, on montre que

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \sim 2.7182818.$$

Finalement, on considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Il est évident que la limite de cette fonction, pour x tendant vers 0, n'est pas définie parce que les images des suites tendant vers 0 ne tendent pas tous vers le même nombre. En effet, les images des points $x_n = \frac{1}{n}$ forment une suite qui tend vers 1, pendant que les images de la suite $x_n = -\frac{1}{n}$ tendent vers 0. Néanmoins, on peut observer que *chaque* suite qui tend vers 0, prenant des valeurs positives (c'est-à-dire que les points se rapprochent de 0 "du côté *droite*") donnent une suite d'images qui tend vers 1, pendant que chaque suite qui approche 0 "du côté *gauche*", prenant donc des valeurs négatives, donne une suite d'images qui tend vers 0.

Définition 4. *On dit que la limite à gauche de la fonction $f(x)$, quand x tend vers a, est égale à b,*

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = b,$$

si chaque suite de nombres x_n tendant vers a en prenant des valeurs inférieures à a, donne une suite d'images $f(x_n)$ tendant vers b. Si ceci est le cas pour chaque suite x_n tendant vers a en prenant des valeurs supérieures à a, on dit que la limite à droite de la fonction $f(x)$, pour x tendant vers a, est égale à b,

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b.$$

On remarque que la limite de la fonction f, quand x tend vers a, existe donc si et seulement si les limites à gauche et à droite existent, et si ces deux limites sont identiques.

2. Techniques de calcul

Dans le paragraphe précédent on a vu comment on peut calculer la limite d'une fonction $y = f(x)$ pour x tendant vers un nombre a en utilisant des suites de nombres. En général, cette technique est trop compliquée pour calculer la limite d'une fonction dans les cas pratiques. Pour éliminer ce problème, on présentera maintenant quelques techniques qui peuvent faciliter le calcul des limites.

Considérons d'abord la fonction constante $f(x) = c$. Il est clair que, pour cette fonction,

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a} c = c, \qquad \text{pour n'importe quel nombre réel } a,\\ &\lim_{x\to\pm\infty} c = c. \end{aligned}$$

Considérons ensuite la fonction identique $f(x) = x$ et choisissons de nouveau un nombre réel arbitraire $a \in \mathbb{R}$. Application des définitions nous donne alors que

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to a} x = a, \qquad \text{pour n'importe quel nombre réel } a,\\ &\lim_{x\to+\infty} x = +\infty,\\ &\lim_{x\to-\infty} x = -\infty. \end{aligned}$$

Dans le chapitre précédent on a vu comment on peut construire des fonctions compliquées en utilisant un nombre de constructions sur les fonctions élémentaires. Dans la suite, on étudiera comment on peut calculer les limites des fonctions compliquées en utilisant les limites de ses composantes.

A cet effet, supposons que f et g sont deux fonctions réelles, que a est un nombre réel ou $\pm\infty$ et que $\lim_{x\to a} f(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)$ existent, c'est-à-dire que ces deux limites sont des nombres réels ou $\pm\infty$. Si on construit une nouvelle fonction, comme par exemple la somme de f et de g, on peut se demander quelle sera la limite de la fonction $f + g$ quand x tend vers a. On présente la solution de ce problème, pour les différentes constructions connues, à l'aide d'une série de tables. Dans la première colonne de chaque table on présente les valeurs possibles de $\lim_{x \to a} f(x)$, et la première ligne donne les valeurs de $\lim_{x \to a} g(x)$. Si on peut calculer la limite de la fonction construite à partir des limites de f et de g, ce résultat se trouve dans la cellule correspondante de la table. Si on ne peut pas calculer la limite de la fonction construite à partir des limites de f et de g, on dit que la limite est *indéterminée*. Ces indéterminations seront marquées dans les tables avec le symbole ??. Dans le paragraphe suivant on étudiera quelques techniques qui nous permettront de résoudre certains types de limites indéterminées.

$f+g$	$b \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in \mathbb{R}$	$a+b$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$??(\infty - \infty)$
$-\infty$	$-\infty$	$??(\infty - \infty)$	$-\infty$

$f \cdot g$	$b \in]-\infty, 0[$	0	$b \in]0, +\infty[$	$+\infty$	$-\infty$
$a \in]-\infty, 0[$	ab	0	ab	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	$??(0 \cdot \infty)$	$??(0 \cdot \infty)$
$a \in]0, +\infty[$	ab	0	ab	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$??(0 \cdot \infty)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$??(0 \cdot \infty)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

$\frac{f}{g}$	$b \in \mathbb{R}_0$	0	$\pm\infty$
$a \in \mathbb{R}_0$	$\frac{a}{b}$	$\pm\infty$	0
0	0	$??\frac{0}{0}$	0
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$??\frac{\infty}{\infty}$

Dans un sens, les cas $\frac{a}{0}$ et $\frac{\infty}{0}$ sont aussi des indéterminations. Dans ces cas, on sait que la limite est égale à $\pm\infty$, mais le signe précis ne peut être déterminé que par une étude du signe de la fonction, impliquant que la limite n'est pas complètement déterminée par les limites des fonctions composantes. Dans le cas $\frac{\infty}{b}$, par contre, le signe de la limite est complètement déterminé par les signes des limites de f et de g, et ces cas ne forment donc pas des indéterminations.

Pour calculer la limite d'une fonction composée $g \circ f$, considérons deux fonctions f et g, et supposons que $\lim_{x \to a} f(x) = b$. On peut alors facilement vérifier que

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to b} g(x).$$

En particulier, on obtient que

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)},$$

à condition que la racine existe.

En pratique, ces résultats signifient qu'on peut calculer la plupart des limites en remplaçant x par la valeur souhaitée. Les tables donnent alors une série de règles de calcul pour les nombres réels et les nombres infinies. On peut toujours utiliser cette méthode si on ne rencontre pas des indéterminations.

Exemple 1. Considérons la fonction $f(x) = x^2 + 5x + 3$. En utilisant les règles de calcul données par les tables, (et les limites de certaines fonctions qu'on a déjà rencontrées) on voit que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2^2 + 5 \cdot 2 + 3 = 17.$$

Exemple 2. Considérons maintenant la fonction $f(x) = x^3 + 5x + 2$. Il est clair que

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty + (+\infty) + 2 = +\infty.$$

Exemple 3. Les mêmes techniques nous montrent que

$$\lim_{x\to 4} \sqrt{25 - x^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Exemple 4. Finalement, on voit que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-2} = \frac{4}{0} = \infty.$$

Pour déterminer le signe de la limite, il faut maintenant examiner le signe des images sous la fonction des points près de 2. On voit que

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

et on conclut que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty.$$

Exemple 5. D'autre part, on voit que

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x^2+5} = \frac{+\infty}{+\infty^2 + 5} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

ce qui donne une indétermination.

Plus tard, on étudiera une autre technique (la règle de de l'Hopital) qui nous permettra de résoudre des limites indéterminées.

Chapitre 3

Continuité

1. Définitions

On dit intuitivement qu'une fonction f est *continue* si le graphique de cette fonction forme une ligne ininterrompue, c'est-à-dire qu'elle n'a pas de trous ni de sauts. Cette idée intuitive est illustrée dans les dessins suivants, qui représentent des fonctions continues et discontinues.

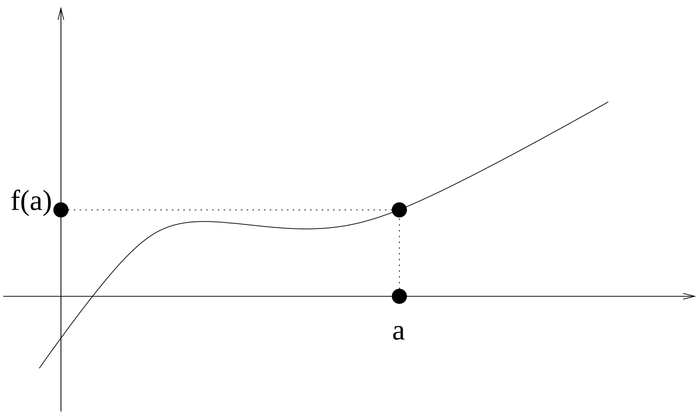

Figure 17. *La fonction f est continue en a.*

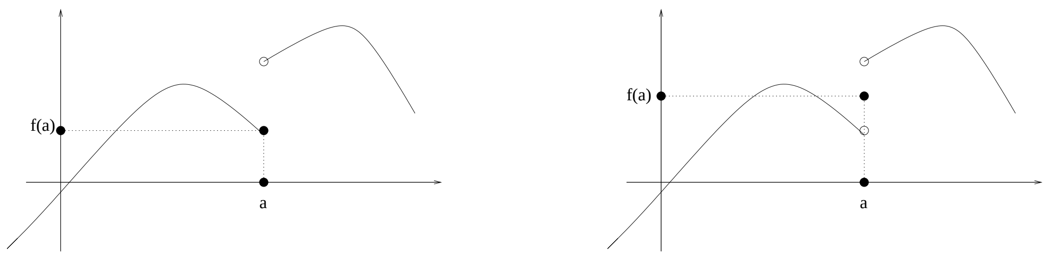

Figure 18. *Deux graphiques de fonctions qui ne sont pas continues.*

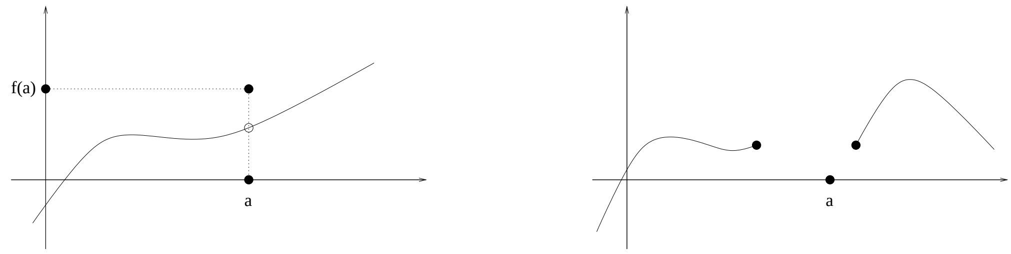

Figure 19. *Deux autres fonctions discontinues.*

Une étude approfondie des propriétés de ces exemples nous mène à la définition suivante.

Définition 1. *Une fonction réelle $y = f(x)$ est continue en $a \in \mathbb{R}$ si*
1. $a \in \mathrm{dom}(f)$, et donc l'image $f(a)$ existe (le graphique n'a pas de trou en a);
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (le graphique ne saute pas en a);
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La fonction f est discontinue en a si elle n'est pas continue en a. On dit que la fonction est continue à gauche si elle n'a les propriétés mentionnées plus haut que pour la limite à gauche, et continue à droite si ces propriétés sont valables pour la limite à droite. Finalement, on dit que la fonction f est une fonction continue si f est continue en chaque point a du domaine de définition, sauf dans les bornes, où elle est continue à gauche ou à droite.

2. Propriétés des fonctions continues

Le résultat suivant se démontre facilement en utilisant les propriétés des limites et la définition de continuité.

Théorème 1. *Soient f et g des fonctions continues en $a \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, $f - g$ et $f \cdot g$ sont de nouveau continues en a. En outre, la fonction $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$.*

Dans le reste de ce chapitre, on mentionne quelques propriétés des fonctions continues qui joueront un rôle important dans les chapitres suivants. Comme les démonstrations de ces théorèmes sont assez difficiles, elles seront omises.

Théorème 2. **(Théorème des valeurs intermédiaires)** *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$. Alors, pour chaque valeur $c \in]f(a), f(b)[$ il existe un nombre $x_0 \in]a,b[$ tel que*

$$f(x_0) = c.$$

En particulier, il suit que, si $f(a)$ et $f(b)$ ont le signe différent, la fonction f s'annule en un point de l'intervalle $]a,b[$.

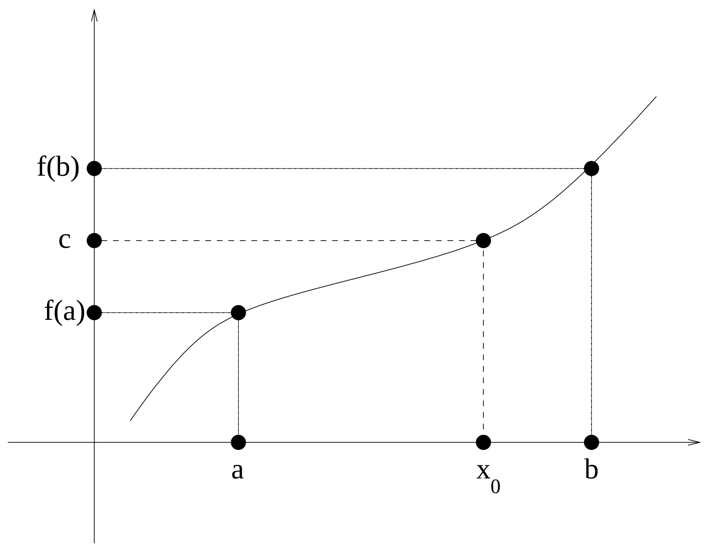

Figure 20. *Le théorème des valeurs intermédiaires.*

Théorème 3. *Une fonction f qui est continue sur l'intervalle $[a,b]$ atteint une valeur maximale et une valeur minimale dans cet intervalle.*

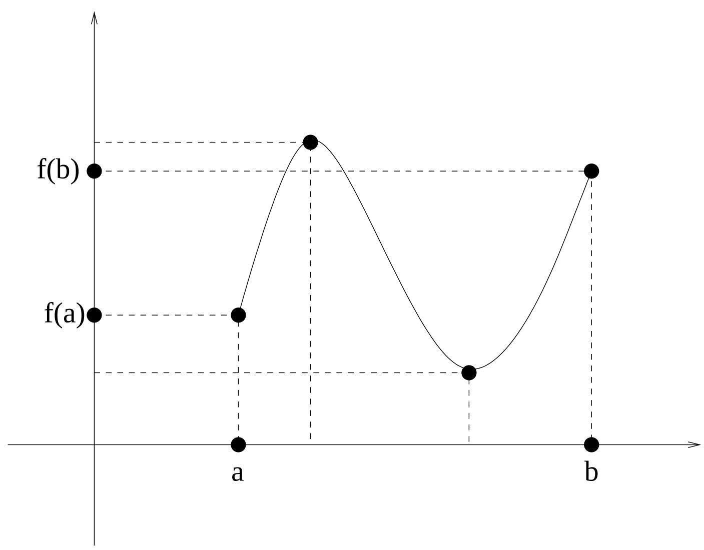

Figure 21. *Une fonction continue atteint des valeurs extrêmes.*

La continuité de la fonction sur l'intervalle $[a, b]$ est une condition importante, sans laquelle ces théorèmes ne sont pas valables. La Figure 22 montre que, si la fonction f n'est pas continue, la fonction f ne prend pas nécessairement toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$, et qu'une fonction f qui n'est pas continue n'atteint pas nécessairement une valeur extrême.

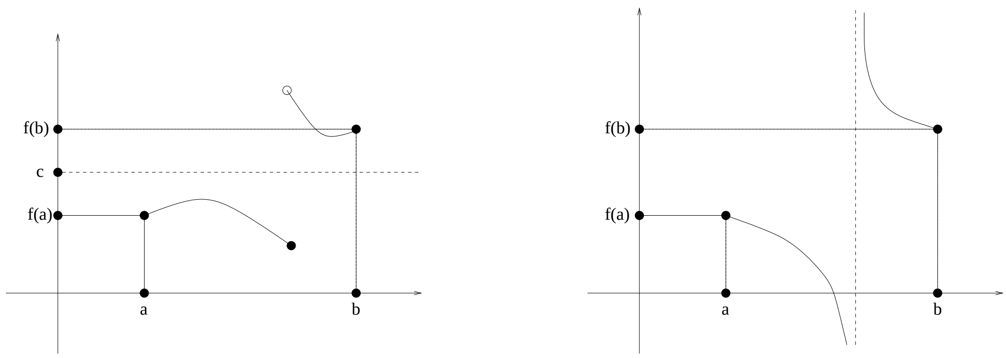

Figure 22. *Fonctions sans minimum ou maximum.*

Chapitre 4

Les dérivées

1. Dérivée d'une fonction réelle

Définition 1. *Soit $y = f(x)$ une fonction réelle qui est continue en un point $a \in \mathrm{dom}(f)$. La dérivée de la fonction $y = f(x)$ en a est définie comme*

$$f'(a) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(a+\Delta) - f(a)}{\Delta},$$

à condition que cette limite existe. Si la limite à gauche

$$\lim_{\Delta \to 0^-} \frac{f(a+\Delta) - f(a)}{\Delta}$$

existe, on appelle cette limite la dérivée à gauche de f en a, et si la limite à droite existe on l'appelle la dérivée à droite de f en a.

Exemple 1. Considérons la fonction $y = x^2$ et le point $a = 1$. Il est évident que

$$f(a) = 1, \qquad f(a+\Delta) = 1 + 2\Delta + \Delta^2,$$

et on conclut que

$$f'(1) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1 + 2\Delta + \Delta^2 - 1}{\Delta} = \lim_{\Delta \to 0} 2 + \Delta = 2.$$

Définition 2. *Si on associe à chaque point $a \in \mathrm{dom}(f)$ la dérivée de $y = f(x)$ en a, on obtient une nouvelle fonction réelle $y = f'(x)$, qu'on appelle la fonction dérivée de f. Cette fonction est souvent dénotée f', y' ou $\frac{dy}{dx}$.*

Exemple 2. Considérons de nouveau la fonction $y = x^2$. La dérivée de cette fonction en un point x est donnée par

$$\lim_{\Delta\to 0} \frac{(x+\Delta)^2 - x^2}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} (2x+\Delta) = 2x,$$

et la fonction dérivée s'écrit donc $y = 2x$.

Exemple 3. Considérons maintenant la fonction $y = \frac{1}{x}$. On voit que

$$f'(x) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta} - \frac{1}{x}}{\Delta} = \lim_{\Delta\to 0} \frac{-\Delta}{x(x+\Delta)\Delta} = -\frac{1}{x^2}.$$

2. Interprétation géométrique

Figure 23 montre que le quotient

$$\frac{f(a+\Delta) - f(a)}{\Delta}$$

correspond à la tangente $\mathrm{tg}(\alpha)$ de l'angle α. Si on considère des accroissements Δ de plus en plus petits, on voit que la droite passant par les points $(a, f(a))$ et $(a+\Delta, f(a+\Delta))$ approche la droite *tangente* au graphique de f en $(a, f(a))$. On conclut que la dérivée de f en un point a est égale à la tangente de l'angle entre la droite tangente et l'axe horizontal ou, de façon équivalente, au *coefficient angulaire* de la tangente au graphique de f en $(a, f(a))$.

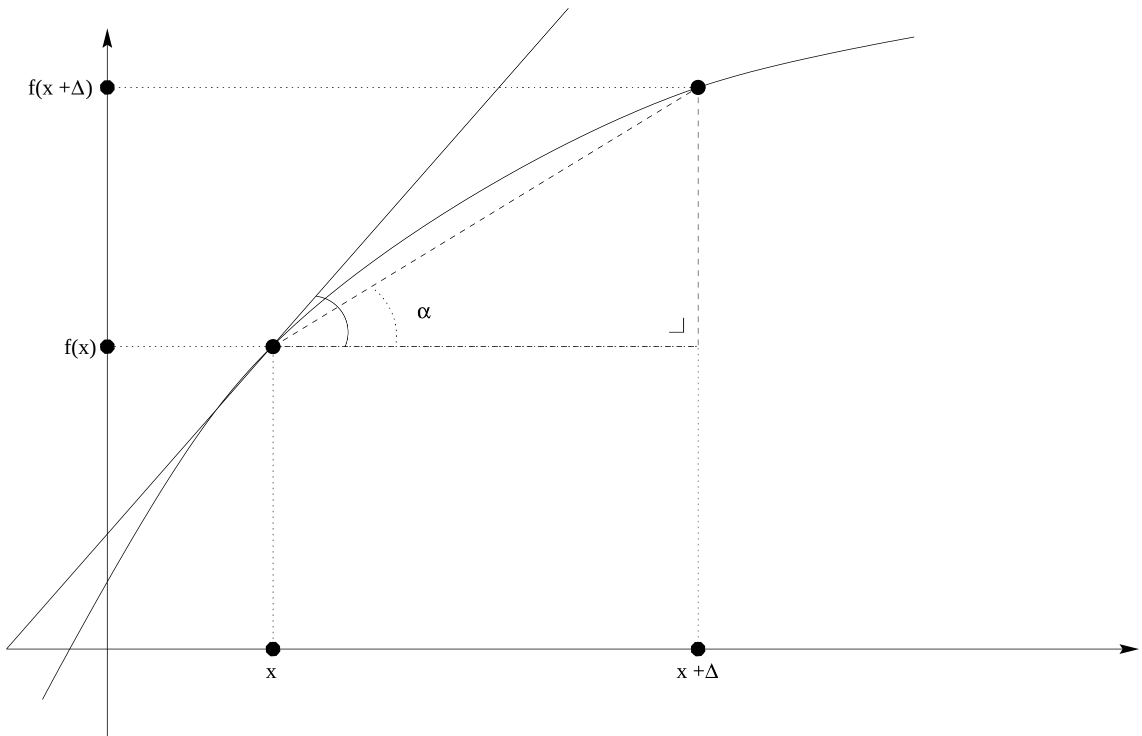

Figure 23. *Interprétation géométrique de la dérivée.*

3. Dérivée d'une fonction puissance

Dans ce paragraphe on calcule les dérivées de quelques fonctions puissance.

Considérons d'abord la fonction constante $y = c$. Il est clair que la fonction dérivée de cette fonction est donnée par

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{c - c}{\Delta} = 0.$$

Pour la fonction identique $y = x$ on obtient

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{x + \Delta - x}{\Delta} = 1.$$

On a déjà montré avant que la fonction dérivée de $y = x^2$ est égale à $f'(x) = 2x$.

Théorème 1. *Soit n un nombre naturel arbitraire. Alors la fonction dérivée de la fonction puissance $f(x) = x^n$ est donnée par*

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Démonstration. La dérivée de $y = x^n$ est donnée par

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{(x + \Delta)^n - x^n}{\Delta}.$$

On peut facilement vérifier que

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \ldots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

et on conclut par conséquent que

$$(x + \Delta)^n - x^n = \Delta((x + \Delta)^{n-1} + \ldots + x^{n-1}).$$

Substitution de cette formule dans la limite nous montre alors que

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0}((x + \Delta)^{n-1} + \ldots + x^{n-1}) = x^{n-1} + \ldots + x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

∎

On remarque que cette formule pour la fonction dérivée des fonctions puissance reste valable si on remplace le nombre naturel n par un nombre réel arbitraire a. Pour le cas $a = -1$ on a déjà démontré que $(x^{-1})' = -x^{-2}$.

4. Règles de calcul

On a déjà remarqué qu'un grand nombre de fonctions réelles se décompose en une série de fonctions élémentaires. On étudie, dans ce paragraphe, comment on peut calculer la dérivée d'une telle fonction composée en utilisant les dérivées de ses composantes.

Théorème 2. *Soient f et g des fonctions différentiables en un point x, c'est-à-dire que les dérivées de ces fonctions existent dans ce point x. Alors on sait que*

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x),\\
(f-g)'(x) &= f'(x) - g'(x),\\
(f\cdot g)'(x) &= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x),\\
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Pour calculer la dérivée d'une somme de deux fonctions, on remarque que

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{(f+g)(x+\Delta)-(f+g)(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} + \frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} + \lim_{\Delta\to 0}\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}\\
&= f'(x) + g'(x).
\end{aligned}$$

La dérivée de la différence de deux fonctions peut être calculée de la même façon.

Ensuite, calculons la dérivée d'un produit de deux fonctions.

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{\Delta\to 0}\frac{(f\cdot g)(x+\Delta)-(f\cdot g)(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)g(x+\Delta)-f(x)g(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)g(x+\Delta)-f(x)g(x+\Delta)+f(x)g(x+\Delta)-f(x)g(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}g(x+\Delta) + f(x)\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}\\
&= \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}\lim_{\Delta\to 0} g(x+\Delta) + \lim_{\Delta\to 0}\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}\lim_{\Delta\to 0} f(x)\\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

Pour calculer la dérivée d'un quotient de deux fonctions, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\frac{f}{g}(x+\Delta) - \frac{f}{g}(x)}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta)g(x) - f(x)g(x+\Delta)}{\Delta g(x+\Delta)g(x)} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+\Delta)}{\Delta g(x)g(x+\Delta)} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}\frac{g(x)}{g(x)g(x+\Delta)} - \frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}\frac{f(x)}{g(x)g(x+\Delta)} \\
&= \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}\lim_{\Delta\to 0}\frac{g(x)}{g(x)g(x+\Delta)} \\
&\quad - \lim_{\Delta\to 0}\frac{g(x+\Delta)-g(x)}{\Delta}\lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x)}{g(x)g(x+\Delta)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.
\end{aligned}$$

∎

Théorème 3. (La règle de chaîne) *Supposons que f est différentiable en un point x et que g est différentiable en $f(x)$. Alors on a*

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x).$$

Démonstration. Comme

$$f'(x) = \lim_{\Delta\to 0}\frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta},$$

on voit immédiatement que

$$\lim_{\Delta\to 0} f'(x) - \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} = 0,$$

et, par conséquent, on a

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta} + \alpha,$$

où $\lim_{\Delta\to 0}\alpha = 0$, et donc

$$f(x+\Delta) = f(x) + \Delta(f'(x) - \alpha).$$

De la même façon, on voit que

$$g(f(x)+\Delta) = g(f(x)) + \Delta(g'(f(x)) - \beta),$$

où maintenant $\lim_{\Delta \to 0} \beta = 0$.

On peut vérifier que

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x + \Delta) - (g \circ f)(x) &= g(f(x + \Delta)) - g(f(x)) \\
&= g(f(x) + \Delta(f'(x) - \alpha)) - g(f(x)) \\
&= g(f(x)) + \Delta(f'(x) - \alpha)(g'(f(x)) - \beta) - g(f(x)) \\
&= \Delta(f'(x) - \alpha)(g'(f(x)) - \beta),
\end{aligned}$$

et, par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(x) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{(g \circ f)(x + \Delta) - (g \circ f)(x)}{\Delta} \\
&= \lim_{\Delta \to 0} (f'(x) - \alpha)(g'(f(x)) - \beta) \\
&= g'(f(x))f'(x).
\end{aligned}$$

∎

Exemple 4. La fonction $y = \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ est une composition $g \circ f$ de $f(x) = x^2 + 3x + 1$ et de $g(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. On sait que

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x) = 2x + 3,$$

et, par conséquent,

$$(g \circ f)'(x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x + 1}}.$$

En appliquant la règle de chaîne pour la composition d'une fonction puissance avec une fonction arbitraire $f(x)$, on voit que

$$(f^n)'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

5. Dérivées des fonctions trigonométriques

Théorème 4. *Les fonctions dérivées des fonctions trigonométriques élémentaires sont données par*

$$\begin{aligned}
f(x) = \sin(x) &\Rightarrow f'(x) = \cos(x), \\
f(x) = \cos(x) &\Rightarrow f'(x) = -\sin(x), \\
f(x) = \mathrm{tg}(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}, \\
f(x) = \mathrm{cotg}(x) &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}.
\end{aligned}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x) = \sin(x)$. Il est clair que

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\sin(x+\Delta) - \sin(x)}{\Delta}.$$

On sait que

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\sin(\frac{p-q}{2})\cos(\frac{p+q}{2}),$$

et on obtient donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{2\sin(\frac{\Delta}{2})\cos(x+\frac{\Delta}{2})}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta}{2})}{\frac{\Delta}{2}} \lim_{\Delta \to 0} \cos(x+\frac{\Delta}{2}) \\ &= 1\cos(x). \end{aligned}$$

La fonction dérivée de $f(x) = \cos(x)$ est calculée de la même façon, en utilisant la formule

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p-q}{2})\sin(\frac{p+q}{2}).$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{\cos(x+\Delta) - \cos(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta \to 0} \frac{-2\sin(\frac{\Delta}{2})\sin(x+\frac{\Delta}{2})}{\Delta} \\ &= -\lim_{\Delta \to 0} \frac{\sin(\frac{\Delta}{2})}{\frac{\Delta}{2}} \lim_{\Delta \to 0} \sin(x+\frac{\Delta}{2}) \\ &= -\sin(x). \end{aligned}$$

Pour calculer la dérivée de $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, on remarque que

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Par conséquent, on a

$$(\operatorname{tg}(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)(\sin(x))' - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Finalement, comme $\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$, il suit de la règle de chaîne que

$$(\operatorname{cotg}(x))' = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2(x)}(\operatorname{tg}(x))' = -\frac{1}{\sin^2(x)}.$$

∎

6. Dérivées des fonctions cyclométriques

Théorème 5. *Les fonctions dérivées des fonctions cyclométriques élémentaires sont données par*

$$\begin{aligned} f(x) = \arcsin(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f(x) = \arccos(x) &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ f(x) = \mathrm{arctg}(x) &\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \\ f(x) = \mathrm{arccotg}(x) &\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Démonstration. On calcule d'abord la dérivée de $f(x) = \arcsin(x)$. Pour cela, on remarque que

$$\sin(\arcsin(x)) = x.$$

Si on dérive les deux membres de cette égalité par rapport à x, la règle de chaîne implique que

$$\cos(\arcsin(x))(\arcsin(x))' = 1,$$

et on voit donc que

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Le théorème de Pythagore nous montre que, pour un angle arbitraire α,

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1,$$

et on voit donc que

$$\cos(\alpha) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(\alpha)}.$$

Comme l'arcsinus prend toujours des valeurs entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on sait que le cosinus d'un tel angle est toujours positif. Par conséquent,

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1-x^2},$$

et on obtient

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La dérivée de l'arccosinus $\arccos(x)$ est calculée de la même façon. On commence avec la formule

$$\cos(\arccos(x)) = x.$$

Ceci implique que

$$-\sin(\arccos(x))(\arccos(x))' = 1,$$

et donc
$$(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Pour calculer la dérivée de l'arctangente $\operatorname{arctg}(x)$ on part de la formule
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)) = x,$$
qui implique que
$$\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg}(x))}(\operatorname{arctg}(x))' = 1,$$
ou
$$(\operatorname{arctg}(x))' = \cos^2(\operatorname{arctg}(x)).$$

Il est clair que
$$\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \operatorname{tg}^2(x) + 1.$$
Par conséquent, on sait que
$$\cos^2(x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(x)}$$
et on obtient
$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De façon analogue, on calcule la dérivée de l'arccotangente $\operatorname{arccotg}(x)$. On remarque d'abord que
$$\operatorname{cotg}(\operatorname{arccotg}(x)) = x,$$
et donc
$$-\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arccotg}(x))}(\operatorname{arccotg}(x))' = 1,$$
ou
$$(\operatorname{arccotg}(x))' = -\sin^2(\operatorname{arccotg}(x)).$$

Comme avant, il est clair que
$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)+\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \operatorname{cotg}^2(x) + 1.$$
On voit donc que
$$\sin^2(x) = \frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2(x)},$$
ce qui implique que
$$(\operatorname{arccotg}(x))' = -\frac{1}{1+\operatorname{cotg}^2(\operatorname{arccotg}(x))} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

∎

7. Dérivées des fonctions exponentielles et logarithmiques

Théorème 6. *Les fonctions dérivées des fonctions exponentielles et des fonctions logarithmiques sont données par*

$$f(x) = \log_a(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)},$$
$$f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln(a).$$

Au cas où le nombre de base est $a = e$ ceci implique

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x},$$
$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $f(x) = \log_a(x)$. Alors les propriétés des fonctions logarithmiques et la définition de la fonction dérivée nous montrent que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\log_a(x+\Delta) - \log_a(x)}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \frac{\log_a(\frac{x+\Delta}{x})}{\Delta} \\ &= \lim_{\Delta\to 0} \log_a((1+\frac{\Delta}{x})^{\frac{1}{\Delta}}) \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta\to 0} \log_a((1+\frac{\Delta}{x})^{\frac{x}{\Delta}}) \\ &= \frac{1}{x} \log_a(\lim_{\Delta\to 0}(1+\frac{\Delta}{x})^{\frac{x}{\Delta}}) \\ &= \frac{1}{x} \log_a(e). \end{aligned}$$

On a déjà remarqué que

$$\ln(a) = \frac{1}{\log_a(e)},$$

ce qui implique que

$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Application de cette formule au cas où $a = e$ donne alors que

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln(e)} = \frac{1}{x}.$$

Pour calculer la dérivée de la fonction exponentielle $f(x) = a^x$ on remarque que

$$\log_a(a^x) = x.$$

Si on dérive les deux membres de cette égalité par rapport à x, la règle de chaîne nous montre que

$$\frac{1}{a^x \ln(a)}(a^x)' = 1,$$

et on a donc

$$(a^x)' = a^x \ln(a).$$

Dans le cas spécial où $a = e$ la formule précédente prend la forme

$$(e^x)' = e^x \ln(e) = e^x.$$

∎

8. Différentiation logarithmique

Théorème 7. *Soit $y = f(x)$ une fonction réelle. Alors on a*

$$f'(x) = f(x)(\ln(f(x)))'.$$

Démonstration. Comme $e^{\ln(a)} = a$ pour n'importe quel nombre réel (positif) a, on peut écrire

$$f(x) = e^{\ln(f(x))}.$$

Dérivation de cette égalité par rapport à x et application de la règle de chaîne nous donne alors

$$f'(x) = e^{\ln(f(x))}(\ln(f(x)))' = f(x)(\ln(f(x)))'.$$

∎

La technique mentionnée dans le résultat précédent s'appelle la *dérivation logarithmique*, et elle nous permet de calculer la dérivée $f'(x)$ d'une fonction en utilisant le logarithme de cette fonction. Cette technique peut être utilisée pour calculer la dérivée d'une fonction de la forme $f(x)^{g(x)}$. Elle s'applique aussi si on doit calculer la dérivée d'un produit d'un nombre de fonctions.

Exemple 5. La fonction dérivée de $f(x) = x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x\ln(x)}$ est donnée par

$$f'(x) = x^x(\ln(x^x))' = x^x(x\ln(x))' = x^x(\ln(x) + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln(x) + 1).$$

Exemple 6. Pour calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2e^{2x}\cos 3x$ il suffit de remarquer que

$$\ln(f(x)) = 2\ln x + 2x + \ln\cos 3x,$$

ce qui implique que

$$(\ln(f(x))' = \frac{2}{x} + 2 - 3\operatorname{tg} 3x.$$

La fonction dérivée est donc donnée par

$$f'(x) = x^2e^{2x}\cos 3x(\frac{2}{x} + 2 - 3\operatorname{tg} 3x).$$

9. Dérivées supérieures

Soit $y = f(x)$ une fonction réelle. Si la fonction dérivée $y = f'(x)$ existe, et si elle admet de nouveau une fonction dérivée, cette dernière fonction est appelée la *dérivée d'ordre deux* de $f(x)$ et elle est dénotée par y'', f'' ou $\frac{d^2f}{dx^2}$. Si la dérivée d'ordre deux de $f(x)$ admet une fonction dérivée, celle-ci s'appelle la *dérivée d'ordre trois* de f, et on la dénote par f''', y''' ou $\frac{d^3f}{dx^3}$.

Définition 3. *Pour un nombre naturel $n > 0$ arbitraire, on appelle la dérivée d'ordre n, $f^{(n)}$, d'une fonction réelle $y = f(x)$, la fonction dérivée de la dérivée d'ordre $(n-1)$ de la fonction f.*

Exemple 7. La table suivante donne la liste des dérivées jusqu'à l'ordre sept des fonctions réelles $y = 2x^5 + 5x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x + 5$ et $y = \sin(2x)$.

$f(x)$	$2x^5+5x^4+x^3+3x^2+2x+5$	$\sin(2x)$
$f'(x)$	$10x^4+20x^3+3x^2+6x+2$	$2\cos(2x)$
$f''(x)$	$40x^3+60x^2+6x+6$	$-4\sin(2x)$
$f'''(x)$	$120x^2+120x+6$	$-8\cos(2x)$
$f^{(4)}(x)$	$240x+120$	$16\sin(2x)$
$f^{(5)}(x)$	240	$32\cos(2x)$
$f^{(6)}(x)$	0	$-64\sin(2x)$
$f^{(7)}(x)$	0	$-128\cos(2x)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

10. Dérivation implicite

On a déjà remarqué que la dérivée d'une fonction $y = f(x)$ en un point a est égale au coefficient angulaire de la tangente au graphique de la fonction dans ce point.

Une courbe dans le plan est souvent représentée à l'aide d'une expression de la forme $F(x, y) = 0$, qu'on appelle une *équation implicite* de la courbe. Par définition, un point (x, y) appartient à la courbe si et seulement si ses coordonnées satisfont l'équation $F(x, y) = 0$.

Exemple 8. L'équation

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

représente un cercle de rayon 1, dont le centre se trouve en $(0, 0)$. Le point $(2, 2)$ n'appartient pas au cercle parce que $F(2, 2) = 7 \neq 0$, pendant que le point $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ se trouve sur la courbe, parce que

$$F(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

Supposons maintenant que $F(x, y) = 0$ est l'équation implicite d'une courbe et que (a, b) appartient à cette courbe. Pour calculer le coefficient angulaire de la tangente au graphique de la courbe dans le point (a, b), on utilise une technique qu'on appelle la *dérivation implicite*. A cet effet, on dérive l'expression $F(x, y) = 0$ par rapport à x, en supposant que y est une fonction de x. Application de la règle de chaîne nous donne alors une expression d'où on peut résoudre y' en fonction de x et de y. Substitution des coordonnées (a, b) nous donne alors le résultat souhaité.

Exemple 9. Pour calculer le coefficient angulaire de la tangente au cercle

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

dans le point $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, on dérive d'abord cette équation par rapport à x. On obtient alors que

$$2x + 2yy' = 0,$$

et donc

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Le coefficient angulaire de la tangente est alors égal à -1.

Exemple 10. Supposons donnée la courbe $x^2 - xy + y^2 = 3$. Dérivation de cette équation nous donne que

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0,$$

et, par conséquent, on sait que

$$y' = -\frac{2x - y}{2y - x}.$$

Pour calculer les dérivées d'ordre supérieur, on dérive l'expression $F(x, y) = 0$ plusieurs fois, et on calcule les dérivées de la même façon.

Exemple 11. Considérons de nouveau la courbe $x^2 - xy + y^2 = 3$. La dérivée d'ordre deux de cette expression est

$$2 - 2y' + 2(y')^2 - xy'' + 2yy'' = 0.$$

Si on utilise l'expression pour y' qu'on a obtenu plus haut, on obtient

$$y'' = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3} = \frac{18}{(x - 2y)^3}.$$

11. La différentielle d'une fonction

Définition 4. *La différentielle df d'une fonction réelle différentiable $f(x)$ est donnée par*

$$df(x) = f'(x)dx.$$

L'interprétation géométrique de la différentielle est illustrée par le dessin suivant. Si on donne un accroissement dx à la variable x, la valeur de

$$df(x) = f'(x)dx$$

représente l'accroissement de la variable y si on considère la tangente au graphique de la fonction. Quoique, pour des accroissements petits dx, l'accroissement $df(x)$ se rapproche de l'accroissement $f(x + dx) - f(x)$, il y a une différence essentielle entre ces deux valeurs.

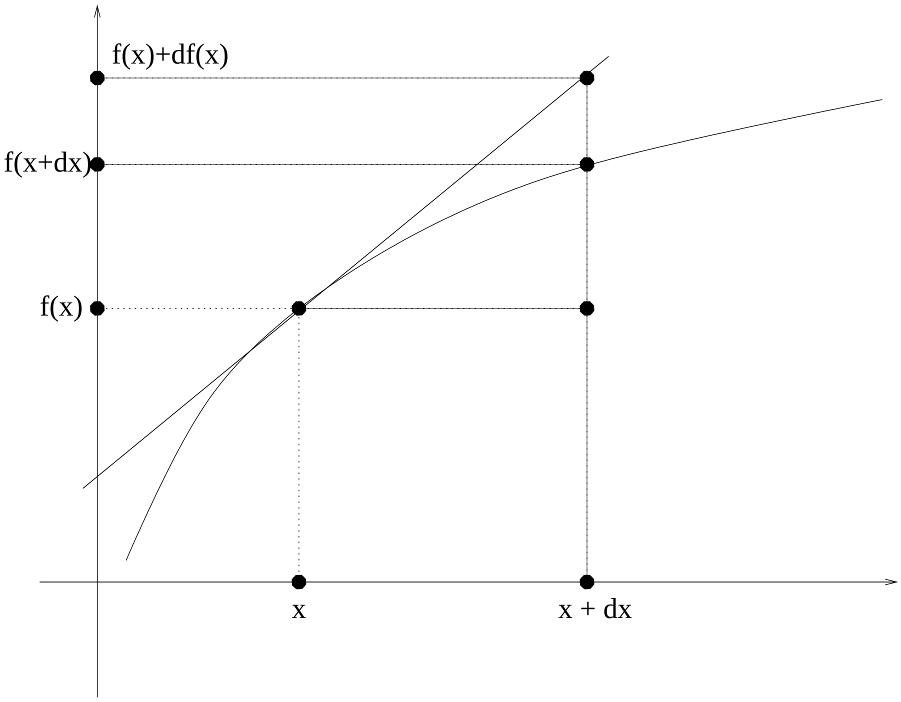

Figure 24. *Interprétation géométrique de la différentielle d'une fonction $f(x)$.*

Pour les accroissements petits dx,la différentielle $df(x)$ est une bonne approximation de l'accroissement $f(x + dx) - f(x)$. Par conséquent, on peut utiliser des différentielles pour le calcul approximatif de l'image $f(x)$ d'un point x sous la fonction f. Supposons que $f(x_0)$ et $df(x_0)$ sont connus en un point x_0. Alors on peut approcher la valeur de $f(x_0 + dx)$ par

$$f(x_0 + dx) \sim f(x_0) + df(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Exemple 12. La différentielle de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$ est donnée par $df(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx$. On peut alors supposer que

$$\sqrt[3]{126} \sim \sqrt[3]{125} + \frac{1}{3(\sqrt[3]{125})^2}1 = 5 + \frac{1}{75} = 5.0133333.$$

Si on compare ce résultat avec la valeur précise de $\sqrt[3]{126}$, qui est égale à 5.0132979 on voit que l'erreur de l'approximation est plus petit que 0.00004.

Exemple 13. Considérons un cube de côté r.Le volume du cube est donné par $V = r^3$. Un accroissement de 1% du côté, $dr = \frac{1}{100}r$, donne un accroissement (approché) du volume de

$$dV = 3r^2dr = \frac{3}{100}r^3.$$

Exemple 14. Considérons une boule dont le rayon r mesure 1 mètre, qui doit être recouvert d'une couche synthétique de 1 cm. Le volume de la boule est donné par $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Un accroissement dr du rayon de 1 cm correspond à un accroissement (approché) du volume de

$$dV = 4\pi r^2dr = 4\pi 100^2 \text{ cm}^3.$$

Chapitre 5

Applications des dérivées

1. La variation d'une fonction

1. Fonctions croissantes et décroissantes

Définition 1. *Soit f une fonction continue et x_0 un point du domaine de définition de f. On dit que f est croissante en x_0 si*

$$f(x_0 - \Delta) < f(x_0) < f(x_0 + \Delta),$$

pour tout nombre positif et petit Δ. On dit que f est décroissante en x_0 si

$$f(x_0 - \Delta) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta)$$

pour ces mêmes valeurs de Δ.

Théorème 1. *Supposons que la fonction f est différentiable en un point x_0. Si $f'(x_0) > 0$, alors la fonction f est croissante en x_0. Si $f'(x_0) < 0$, f est décroissante en x_0.*

Démonstration. Supposons d'abord que $f'(x_0) > 0$. On sait alors que

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} > 0.$$

Par conséquent, pour toute valeur suffisamment petite de Δ on a

$$\frac{f(x_0 + \Delta) - f(x_0)}{\Delta} = \alpha > 0.$$

Choisissons maintenant un $\Delta > 0$ arbitraire. Il suit alors de l'expression précédente que

$$f(x_0 + \Delta) - f(x_0) = \alpha\Delta > 0,$$

et donc $f(x_0 + \Delta) > f(x_0)$. La même expression implique aussi que

$$f(x_0 - \Delta) - f(x_0) = -\Delta\alpha < 0,$$

et donc $f(x_0 - \Delta) < f(x_0)$. On conclut que la fonction f est croissante en x_0.

Quand $f'(x_0) < 0$ on montre de la même façon que

$$f(x_0 - \Delta) > f(x_0) > f(x_0 + \Delta),$$

ce qui implique que f est décroissante en x_0.

■

Définition 2. *Quand $f'(x_0) = 0$ on ne sait pas si la fonction f est croissante ou décroissante en x_0. On dit alors que la fonction f est* stationnaire *en x_0, et le point x_0 est appelé un* point critique *de la fonction f.*

2. Minima et maxima d'une fonction réelle

Définition 3. *On dit que la fonction f a un* maximum *en un point x_0 si, pour toutes les valeurs suffisamment petites (positives et négatives) de Δ, on a*

$$f(x_0 + \Delta) < f(x_0).$$

Si pour toutes ces valeurs de Δ on a

$$f(x_0 + \Delta) > f(x_0),$$

on dit que la fonction f a un minimum *en x_0.*

Théorème 2. *Soit f une fonction réelle qui est différentiable dans l'intervalle $[a,b]$ et supposons que la fonction f a un maximum ou un minimum en un point $x_0 \in]a,b[$. Alors on sait que $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f atteint un maximum dans le point x_0. Alors on sait que, pour toutes les valeurs suffisamment petites de Δ, $f(x_0 + \Delta) < f(x_0)$. Par conséquent, si Δ prend n'importe quelle valeur négative et suffisamment petite, le quotient

$$\frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} > 0,$$

pendant que ce quotient est négatif pour les valeurs positives et suffisamment petites de Δ. On conclut que

$$\lim_{\Delta\to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} \geq 0, \qquad \lim_{\Delta\to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} \leq 0.$$

Comme f est différentiable dans le point x_0, la limite à gauche et la limite à droite doivent être égales, et on voit que

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{f(x_0+\Delta) - f(x_0)}{\Delta} = 0.$$

Si la fonction f a un minimum en x_0, le même argument montre que $f'(x_0) = 0$.

∎

Exemple 1. La fonction $y = x^2 - 4x + 3$ a un minimum en $x = 2$. Dans ce point, la fonction est donc stationnaire.

Le théorème précédent nous montre que, si f est différentiable, les minima et les maxima sont toujours des points où la fonction est stationnaire. Si f n'est pas différentiable, on peut avoir d'autres minimums et maximums. Ces point extrêmes se trouvent alors toujours dans les points où la dérivée est indéfinie, pendant que la fonction y est définie. Ces derniers points seront également appelés des *points critiques* de la fonction f.

Exemple 2. La fonction $y = x^{\frac{2}{3}}$ atteint un minimum en $x = 0$. La fonction n'est pas stationnaire dans ce point parce que la fonction dérivée $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ n'est pas définie dans ce point.

3. Comment déterminer les minima et les maxima (Première méthode).

Pour déterminer les minima et les maxima d'une fonction réelle $y = f(x)$ on peut utiliser la technique suivante:

1. Cherchez les points critiques de la fonction, c'est-à-dire les points où la fonction est stationnaire et les points du domaine de définition de f où la dérivée n'existe pas.

2. Déterminez le signe de la dérivée dans tous les intervalles entre ces points critiques.

3. Si le signe de la dérivée change de $+$ en $-$ le point critique est un maximum. Si le signe change de $-$ en $+$ ce point est un minimum. Si le signe de f' ne change pas, le point critique est ni un minimum ni un maximum.

Exemple 3. Pour déterminer les minimums et les maximums de la fonction $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4$, on cherche d'abord tous les points critiques. En résolvant l'équation

$$3x^2 - 9x + 6 = 0,$$

on voit que ces points critiques se trouvent en $x = 1$ et $x = 2$. L'étude du signe de la dérivée de f donne les résultats suivants:

x		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

On conclut que la fonction a un maximum en $x = 1$. La valeur maximale est alors donnée par $f(1) = \frac{13}{2}$. En plus, la fonction a un minimum en $x = 2$, et la valeur minimale est donnée par $f(2) = 6$. Figure 25 montre le graphique de la fonction.

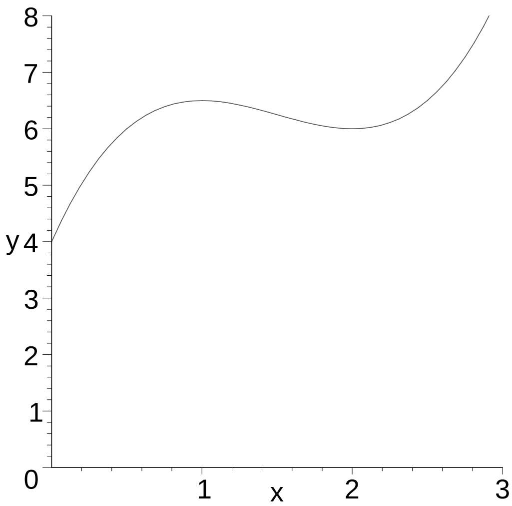

Figure 25. *Grafiek van de functie* $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4$.

Exemple 4. Les points critiques de la fonction $y = x^3 + 2$ sont donnés par l'équation

$$3x^2 = 0,$$

et $x = 0$ est donc le seul point critique de cette fonction. L'étude du signe de la dérivée nous montre que

x		0	
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Cette fonction a donc ni un maximum ni un minimum, un fait illustré par la Figure 26.

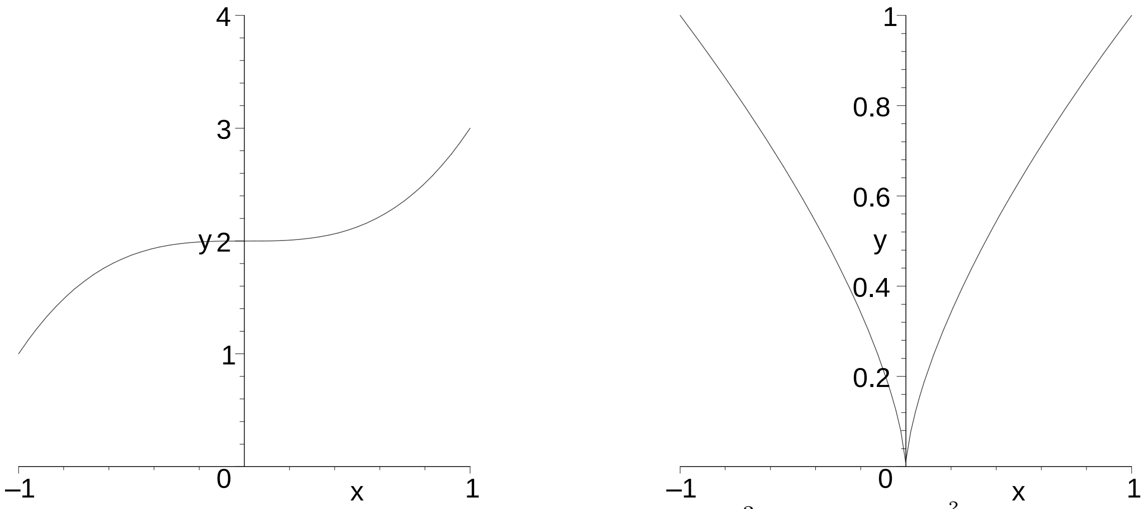

Figure 26. *Grafieken van de functies $y = x^3 + 2$ en $y = x^{\frac{2}{3}}$.*

Exemple 5. Les points critiques de la fonction $y = x^{\frac{2}{3}}$ (dont le graphique est donné par Figure 26) sont les points où $f'(x) = 0$ et les points où $f'(x)$ est indéfinie pendant que x appartient au domaine de définition de f. La fonction dérivée $y = f'(x)$ prend la forme $\frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$. Cette fonction est indéfinie en $x = 0$, qui est un point du domaine de définition de f. Par conséquent, $x = 0$ est un point critique de f. Une étude du signe de la fonction dérivée f' donne le résultat suivant:

x		0	
$f'(x)$	$-$	$\vert$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

On conclut que $x = 0$ est un minimum de la fonction $f(x)$. La valeur minimale de la fonction est donnée par $f(0) = 0$.

4. L'étude de la dérivée d'ordre deux (courbure)

Supposons maintenant que la dérivée d'ordre deux de la fonction $y = f(x)$ en un point x_0 est positive. Les résultats précédents nous montrent alors que la dérivée d'ordre un est croissante en x_0, c'est-à-dire que

$$f'(x_0 - \Delta) < f'(x_0) < f'(x_0 + \Delta)$$

pour n'importe quelle valeur positive et suffisamment petite de Δ. Ceci implique que la fonction $f(x)$ monte plus vite (ou descend moins vite) à droite du point x_0 qu'à gauche. On dit que la fonction f est *concave* en x_0.

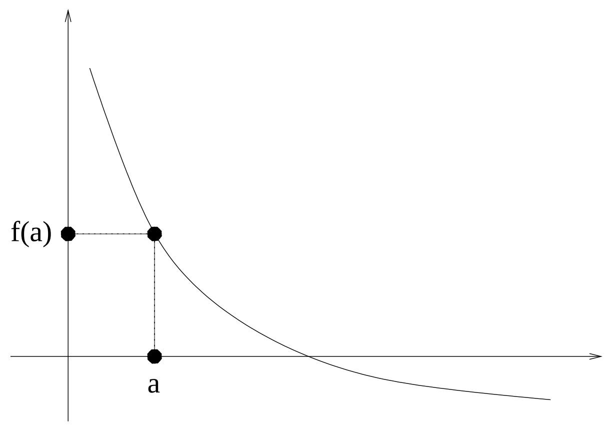

Figure 27. *Un exemple d'une fonction concave en un point a.*

Quand $f''(x_0) < 0$ on montre de la même façon que f descend plus vite (ou monte moins vite) à droite du point x_0 qu'à gauche, et on dit que la fonction est *convexe* en x_0.

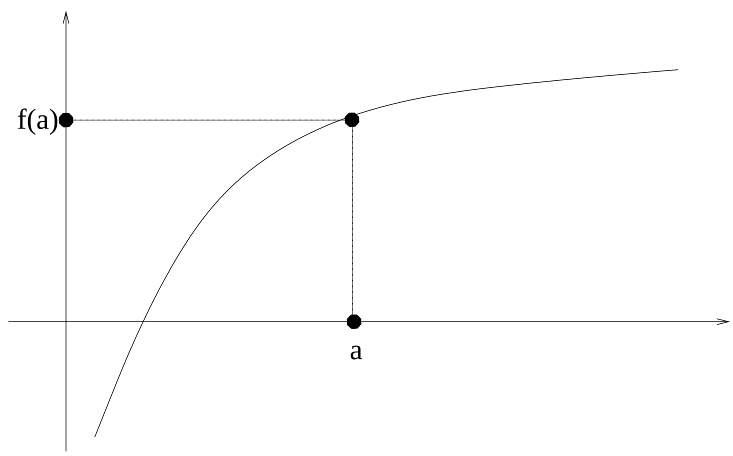

Figure 28. *Un exemple d'une fonction convexe en un point a.*

Les points appartenants au domaine de définition de f où le comportement de la fonction change de convexe en concave, c'est-à-dire où la dérivée d'ordre deux change de signe, sont appelés les *points d'inflexion.* Il est clair que ceci ne peut se passer que dans les points où la dérivée d'ordre deux s'annule et dans les points où cette dérivée n'existe pas mais qui appartiennent néanmoins au domaine de définition de f.

Exemple 6. La dérivée d'ordre deux de la fonction $y = x^3 + 2$ (représenté par la Figure 26) est donnée par

$$f''(x) = 6x.$$

Cette fonction change de signe en $x = 0$, et $x = 0$ est donc un point d'inflexion de cette fonction.

Exemple 7. La dérivée d'ordre deux de $y = x^{\frac{1}{3}}$ (Figure 29) est donnée par $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$. Il est clair que le point $x = 0$ appartient au domaine de définition de cette fonction, mais que la dérivée d'ordre deux n'est pas définie en $x = 0$. Néanmoins, le signe de cette fonction dérivée change en $x = 0$. Par conséquent, le point $x = 0$ est un point d'inflexion de la fonction. La tangente au graphique dans ce point est verticale.

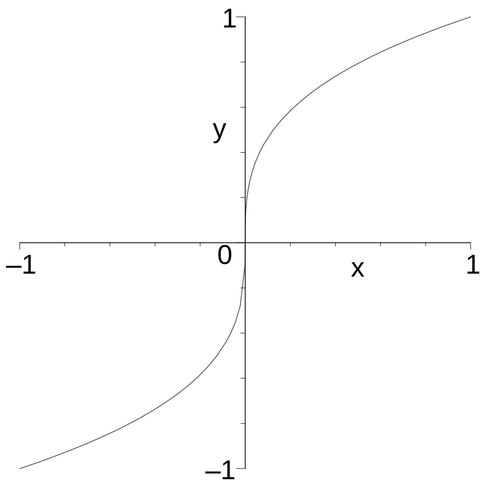

Figure 29. *Grafiek van de functie* $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$*.*

5. Comment déterminer les minima et les maxima (Deuxième méthode).

Dans ce paragraphe on décrit une deuxième technique qui, dans des cas particuliers, nous permet de déterminer quels points sont des minima et des maxima d'une fonction réelle.

1. Comme avant, on commence par la détermination des points critiques de la fonction f.

2. Pour chaque point critique x_0, on calcule ensuite la valeur $f''(x_0)$ de la dérivée d'ordre deux dans ce point.

3. Si $f''(x_0) > 0$, la fonction f a un minimum en x_0, pendant que x_0 est un maximum si $f''(x_0) < 0$. Dans tous les autres cas ($f''(x_0) = 0$ ou indéfini) il est impossible de tirer une conclusion pour le point critique x_0. Il faut alors appliquer la première méthode.

Exemple 8. Les points critiques de la fonction $y = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x + 4$ (Figure 25) sont données par $x = 1$ et $x = 2$. La dérivée d'ordre deux de cette fonction prend la forme

$$f''(x) = 6x - 9,$$

ce qui implique que $f''(1) = -3$ et $f''(2) = 3$. Comme avant, on conclut que cette fonction f a un maximum en $x = 1$ et un minimum en $x = 2$.

2. Equation de la tangente et de la normale

Soit $y = f(x)$ une fonction réelle et x_0 un nombre réel appartenant au domaine de définition de f. Nous avons déjà vu que la dérivée $f'(x_0)$ de la fonction f en un point x_0 (si elle existe) représente le coefficient angulaire de la tangente au graphique de f dans le point $(x_0, f(x_0))$.

On peut maintenant calculer l'équation de la tangente, c'est-à-dire, la condition que les coordonnées d'un point doivent satisfaire pour que le point appartienne à la tangente. Pour une droite non-verticale, une telle équation prend la forme $y = mx + q$, où m est le coefficient angulaire de la droite. On voit donc que la tangente a une équation de la forme

$$y = f'(x_0)x + q,$$

où le nombre q doit être choisi de façon que le point $(x_0, f(x_0))$ appartienne à la droite. Ceci implique que

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + q,$$

et, par conséquent, on a

$$q = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

La tangente a donc une équation de la forme

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - x_0 f'(x_0),$$

ou, si on écrit $f(x_0) = y_0$,

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Exemple 9. Pour calculer la tangente au graphique de la fonction $y = x^{\frac{1}{3}}$ dans le point $(1, 1)$, on met $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Nous voyons alors que $f'(x_0) = \frac{1}{3}$, et l'équation de la tangente prend la forme

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1).$$

Si la dérivée de la fonction en un point a est infinie, la tangente au graphique de f dans ce point est verticale. Dans ce cas, l'équation de cette droite prend la forme

$$x = a,$$

où il faut choisir a de façon que $(x_0, f(x_0))$ appartienne à la droite. Il est évident que l'équation s'écrit

$$x = x_0.$$

Exemple 10. Dans le point $x_0 = 0$, la dérivée de la fonction $y = x^{\frac{1}{3}}$ est infinie. La tangente est alors verticale et elle est représentée par l'équation

$$x = 0.$$

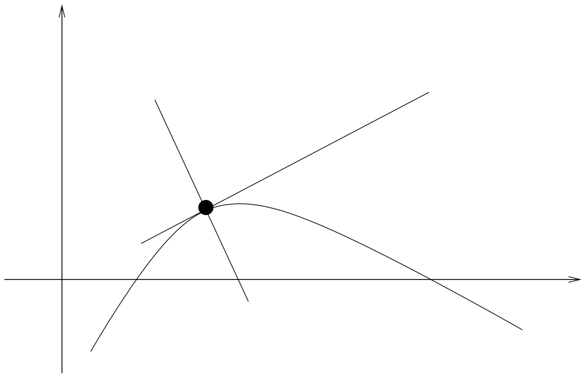

Figure 30. *La tangente et la normale en un point.*

La *normale* au graphique d'une fonction réelle en un point (x_0, y_0) est la droite qui est perpendiculaire à la tangente en ce point. Si la tangente est verticale, la normale est une droite horizontale et son équation est donc donnée par

$$y = y_0.$$

Dans le cas où la tangente est horizontale (c'est-à-dire, le coefficient angulaire s'annule) la normale est verticale et elle a donc une équation de la forme

$$x = x_0.$$

Dans le cas général, c'est-à-dire, si la tangente est ni verticale ni horizontale, le coefficient angulaire de la normale est donnée par $-\frac{1}{f'(x_0)}$. En effet, on sait que deux droites sont perpendiculaires si le produit de leurs coefficients angulaires est égal à -1. La normale a donc une équation de la forme

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Exemple 11. La coefficient angulaire de la tangente au graphique de la fonction $y = x^{\frac{1}{3}}$ dans le point $(1, 1)$ est donné par $f'(x_0) = \frac{1}{3}$. Par conséquent, le coefficient angulaire de la normale est égal à -3, et on conclut que la normale est donnée par l'équation

$$y - 1 = -3(x - 1).$$

3. La dérivée comme "vitesse"

Exemple 12. Considérons un objet qui tombe d'une hauteur donnée (par exemple, 10000 m) sous l'influence de la gravité. La hauteur au-dessus du sol est alors donné, en fonction du temps, par la fonction $h = 10000 - 5t^2$. La Figure 31 donne le graphique de cette fonction.

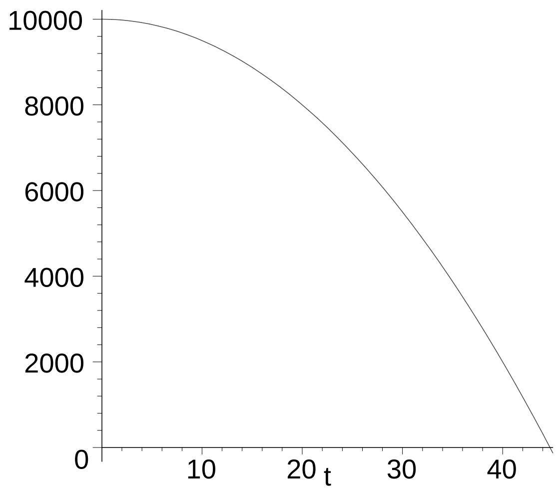

Figure 31. *Hauteur de l'objet en fonction du temps.*

On constate que l'objet tombe de plus en plus vite vers la terre. Afin de calculer la vitesse de l'objet à un moment donné t_0 (par exemple, après 15 secondes, c'est-à-dire quand $t_0 = 15$), on calcule la distance parcourue par l'objet (la différence en hauteur) dans un intervalle de temps Δ (par exemple 1 seconde), c'est-à-dire, on calcule la différence

$$h(t_0 + \Delta) - h(t_0).$$

Il est clair que (la valeur absolue du) quotient

$$\frac{h(t_0 + \Delta) - h(t_0)}{\Delta}$$

nous donne la *vitesse moyenne* de l'objet dans l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + \Delta]$, c'est-à-dire la vitesse *constante* qui nous permet de traverser la distance donnée dans l'intervalle de temps Δ.

Si on considère des périodes de plus en plus courtes, c'est-à-dire qu'on considère des Δ de plus en plus petits, la vitesse moyenne s'approche de plus en plus de la vitesse instantanée de l'objet au moment t_0.

Quand la fonction $y = f(t)$ décrit l'évolution d'un paramètre en fonction du temps, on peut donc donner une interprétation alternative (mécanique) à la notion de la dérivée d'une fonction $f(t)$.

La valeur du paramètre y au moment t étant donnée par $f(t)$, on voit immédiatement que

$$\frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta}$$

nous donne la vitesse moyenne à laquelle le paramètre y varie dans l'intervalle de temps $[t, t + \Delta]$. En considérant des longueurs de l'intervalle Δ de plus en plus petits, on trouve que

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{f(t + \Delta) - f(t)}{\Delta} = f'(t),$$

tandis que la vitesse moyenne tend vers la *vitesse instantanée* à laquelle y varie au moment t. On peut donc considérer la dérivée $f'(t_0)$ au moment t_0 comme la vitesse à laquelle le paramètre $y = f(t)$ change au moment t_0.

Exemple 13. La vitesse (instantanée) de l'objet tombant (exemple précédent) au moment t est donnée par

$$h'(t) = -10t.$$

Après 15 secondes la vitesse est donc égale à -150m/s. La valeur étant négative, la hauteur h est décroissante à ce moment.

Exemple 14. Considérons maintenant un *mouvement rectiligne*, c'est-à-dire la description du mouvement d'un particule le long d'une ligne droite. En choisissant un point de référence (l'origine) et une unité, un point de la droite correspond à un nombre réel s, et le mouvement est complètement décrit par une fonction

$$s(t),$$

représentant la position du particule au moment t.

La *vitesse instantanée* du particule au moment t est donnée par la dérivée de la fonction s,

$$v = s'(t).$$

Il est clair que, quand $v > 0$, le particule se déplace dans la direction des valeurs s plus grands, tandis que $v < 0$ signifie que le particule se déplace vers des valeurs de s décroissants. Quand $v = 0$ on dit que le particule est, à ce moment, *au repos*. De la même façon, la dérivée d'ordre deux

$$a = v'(t) = s''(t)$$

détermine la vitesse à laquelle varie la vitesse v, c'est-à-dire *l'accélération instantanée* du particule au moment t.

Si $a > 0$, alors v est croissant, et $a < 0$ signifie que v est décroissant. Si a et v ont le même signe, la vitesse du particule est croissante en valeur absolue, et elle est décroissante (en valeur absolue) quand a et v ont un signe opposé.

Exemple 15. Considérons un particule qui bouge sous l'influence de la gravité sur une droite verticale. Le mouvement du particule est décrit par la fonction

$$h = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0,$$

qui donne la hauteur au-dessus du sol en fonction du temps. Ici, g est la constante de gravité, et h_0 et v_0 représentent la hauteur et la vitesse du particule au moment $t = 0$.

La vitesse instantanée du particule est donnée par $v = -gt + v_0$, l'accélération instantanée par $a = -g$.

Exemple 16. (Mouvement circulaire) Considérons maintenant le mouvement d'un particule le long d'un cercle. Un point P du cercle peut toujours être représenté par l'angle (au centre du cercle) θ déterminé par le point P et un point de référence (origine) O. Le mouvement du point est alors décrit par une fonction

$$\theta(t),$$

qui donne la position du point en fonction du temps La dérivée de la fonction $\theta(t)$,

$$\omega = \theta'(t),$$

donne la vitesse à laquelle l'angle θ varie, et on appelle ω la *vitesse angulaire instantanée.*

La dérivée d'ordre deux de la fonction,

$$\alpha = \omega'(t) = \theta''(t),$$

est appelée *accélération angulaire instantanée.*

Si $\alpha = 0$ pour chaque valeur de t, ω est constant, et on dit que le mouvement a une *vitesse angulaire constante.* Si α est constant, on parle d'une *accélération angulaire constante.*

4. Vitesses liées

Considérons maintenant plusieurs paramètres, chacun dépendant du temps, qui sont reliés par une équation. En calculant la dérivée de l'équation par rapport au temps, on obtient une rélation entre les vitesses auxquelles les paramètres varient.

Exemple 17. Considérons un ballon sphérique, dont le gaz échappe à une vitesse de $900\text{cm}^3/\text{s}$, c'est-à-dire que $V' = -900$. Comme le volume et l'aire de la sphère de rayon r sont donnés par

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad S = 4\pi r^2,$$

on constate que

$$V' = 4\pi r^2 r', \qquad S' = 8\pi r r'.$$

Au moment où le rayon de la sphère mesure $r = 360\text{cm}$,

$$r' = \frac{-900}{4\pi 360^2},$$

et, par conséquent,

$$S' = 8\pi 360 \cdot \frac{-900}{4\pi 360^2} = -5\text{cm}^2/\text{s}.$$

L'aire de la sphère décroit donc de 5cm^2 par seconde.

Chapitre 6

Dérivées partielles

1. Introduction

Une fonction réelle de n variables est une loi de la forme

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qui associe à un ensemble de n nombres réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un nombre réel $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Exemple 1. La fonction

$$f(x, y) = \sin(x + y),$$

est une fonction qui dépend de deux variables. Aux nombres réels $x = 1$ et $y = 1$ elle associe le nombre réel $\sin(1 + 1) = \sin(2)$, et pour les valeurs $x = 0$ et $y = \pi$ elle donne le nombre réel $\sin(0 + \pi) = 0$. La fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

est une fonction de trois variables.

Dans le présent chapitre on étudie quelques aspects de la théorie des fonctions de plusieurs variables. Pour des raisons pratiques, on se limite surtout à l'étude des fonctions de deux variables, mais les idées introduites dans ce chapitre sont facilement généralisées aux fonctions de trois variables (ou plus).

Une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ peut être représentée de façon géométrique comme une surface dans l'espace tridimensionnel. A cet effet, on associe à chaque point (x, y) dans le plan XY un point $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$ dans l'espace tridimensionnel.

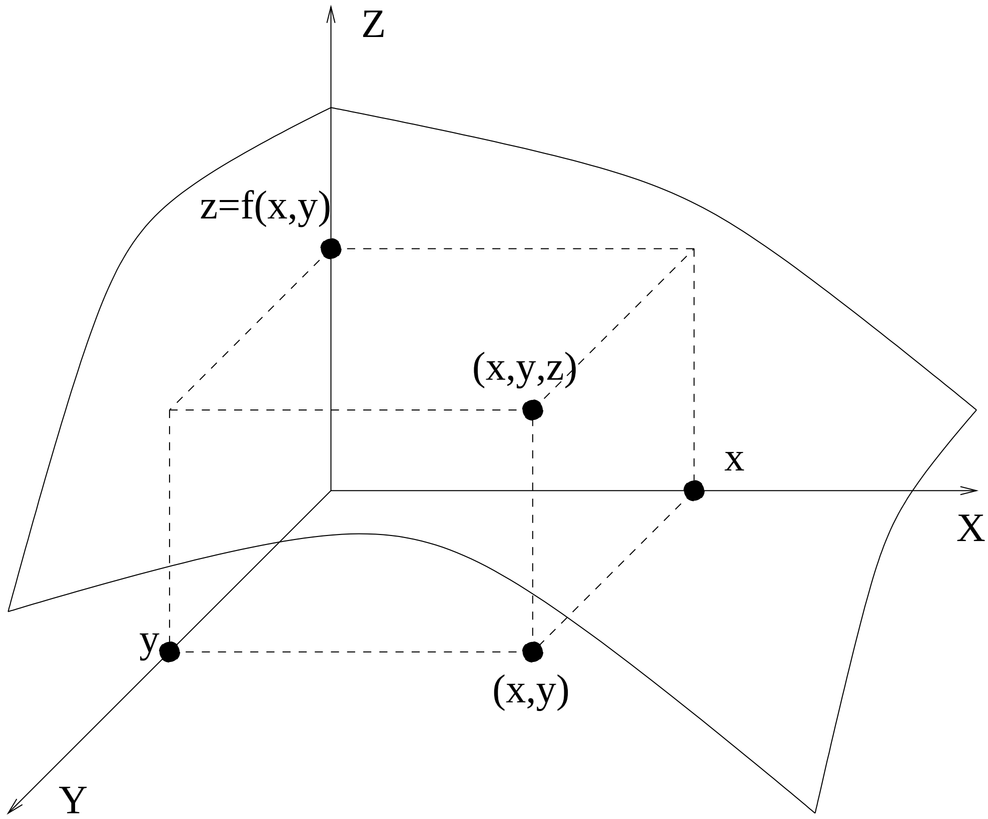

Figure 31. *Représentation géométrique d'une fonction de deux variables.*

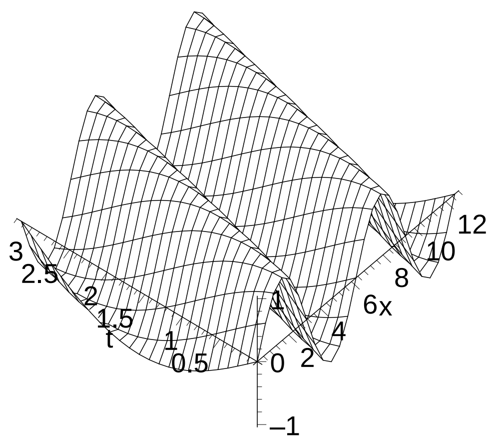

Figure 32. *Représentation géométrique de la fonction $f(x, t) = \sin(x - t)$.*

2. Dérivée partielle

La dérivée d'une fonction $y = f(x)$ d'une seule variable x mesure le changement de la valeur de $f(x)$ lorsqu'on change la valeur de la variable x. Pour une fonction $z = f(x, y)$ de deux variables, on peut également mesurer le changement de la valeur de $f(x, y)$ lorsqu'on change la valeur d'une des variables (et l'autre reste constante).

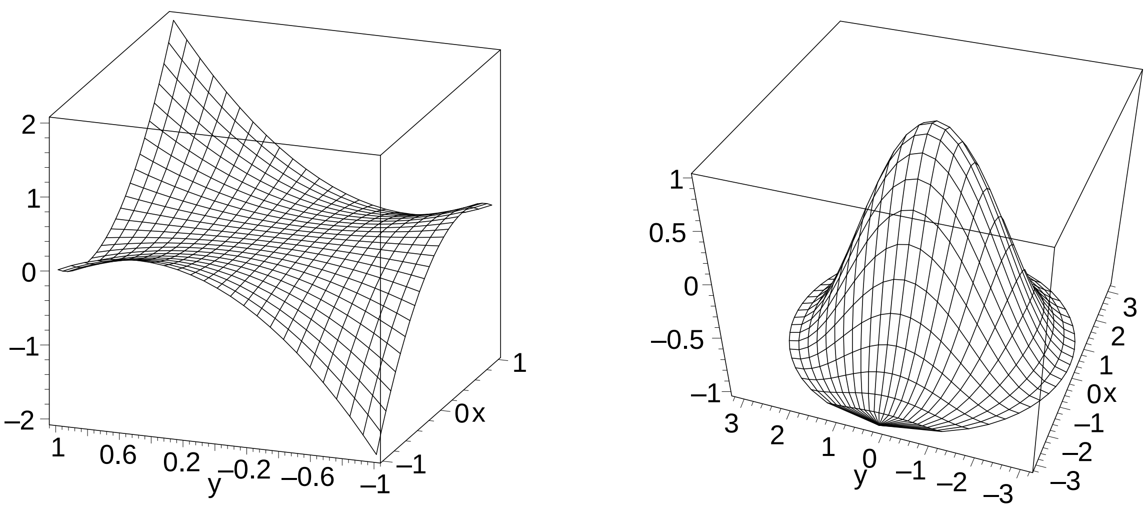

Figure 33. *Représentation géométrique de* $f(x,y) = x^2y + xy^2$ *et de* $f(x,y) = \cos(\sqrt{x^2+y^2})$.

Supposons donc que $z = f(x,y)$ est une fonction de deux variables. Si on tient constant la valeur de y, on peut considérer la fonction comme dépendant d'une seule variable x. La dérivée de cette fonction est alors donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}.$$

Cette dérivée est appelée la *dérivée partielle de f par rapport à x*. De la même façon, si on tient constant la valeur de x et on laisse varier la valeur de y, la fonction $f(x,y)$ ne dépend que d'une seule variable y. La dérivée de cette fonction est donnée par

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h) - f(x,y)}{h},$$

et on l'appelle la *dérivée partielle de f par rapport à y*.

Exemple 2. Considérons la fonction $f(x,t) = \sin(x - 2t)$. Les dérivées partielles de cette fonction par rapport aux variables x et t sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x-2t), \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -2\cos(x-2t).$$

La dérivée partielle par rapport à x d'une fonction de deux variables (en un point (x_0,y_0)) a une signification géométrique qui peut être expliquée comme suit. D'abord, la fonction $z = f(x,y)$ est représentée de façon géométrique par une surface dans l'espace tridimensionnel. Si on fait varier la variable x en tenant constant la valeur de y, on considère l'intersection de la surface avec le plan vertical $y = y_0$ (qui est parallèle au plan XZ et qui passe par le point (x_0,y_0)). Cette intersection est une courbe plane (et elle peut donc être considérée comme une fonction d'une seule variable x). La dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ donne alors le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe dans le point (x_0,y_0,z_0). De la même manière, la dérivée partielle par rapport à y correspond au coefficient angulaire de la tangente à l'intersection de la surface $z = f(x,y)$ avec le plan vertical $x = x_0$.

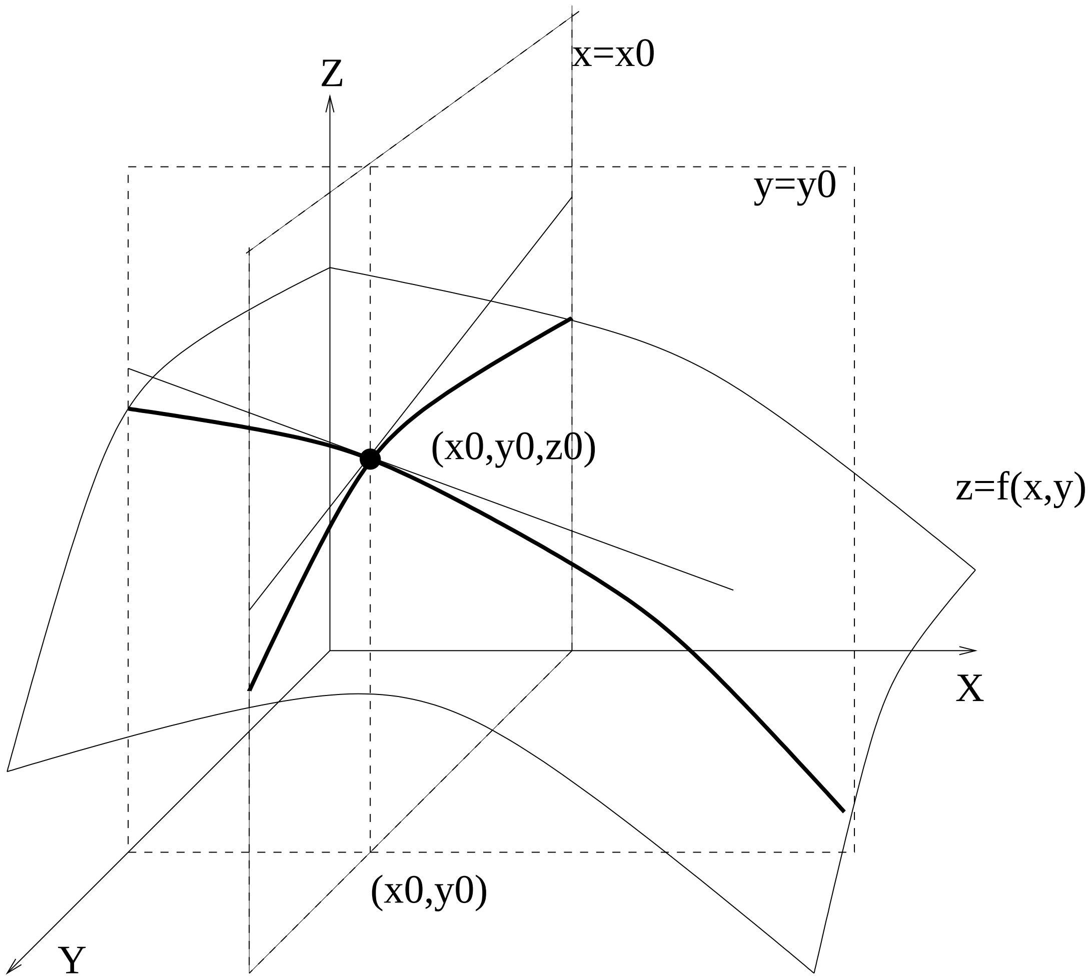

Figure 34. *Interprétation géométrique de la dérivée partielle.*

Exercice 1. Calculez toutes les dérivées partielles des fonctions suivantes.

1. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$
2. $z = \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x}$
3. $z = \sin(2x + 3y)$
4. $z = e^{x^2+3xy}$
5. $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$
6. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7. $z = 2x^2 - 5xy + y^2$
8. $z = \dfrac{x}{y^2} - \dfrac{y}{x^2}$
9. $z = \sin 3x \cos 4y$
10. $z = \sin(x - vt)$
11. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$
12. $f(x, y, z) = xyz$

3. Dérivées partielles d'ordre supérieur.

Supposons comme avant que $z = f(x, y)$ est une fonction de deux variables. Les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont, en général, de nouveau des fonctions de deux variables, impliquant qu'on peut calculer les dérivées partielles de ces fonctions. Ces dérivées sont appelées les *dérivées partielles d'ordre deux*, et elles sont dénotées comme suit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$

Exemple 3. Les dérivées partielles d'ordre deux de la fonction

$$f(x, t) = \sin(x - 2t)$$

sont données par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(x - 2t)\right) = -\sin(x - 2t), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\cos(x - 2t)\right) = 2\sin(x - 2t), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-2\cos(x - 2t)\right) = 2\sin(x - 2t), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(-2\cos(x - 2t)\right) = -4\sin(x - 2t).
\end{aligned}$$

En prenant les dérivées partielles des dérivées partielles d'ordre deux, on obtient les dérivées d'ordre trois.

On remarque aussi que, si la fonction $z = f(x, y)$ et toutes ses dérivées partielles sont des fonctions continues, l'ordre dans lequel on calcule les dérivées partielles mixtes n'est pas essentiel, c'est-à-dire que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Exercice 2. Calculez toutes les dérivées partielles d'ordre deux des fonctions de l'exercice précédente.

4. Différentielle partielle et totale

Dans un des chapitres précédents, on a défini la différentielle d'une fonction $y = f(x)$ d'une seule variable x comme

$$df(x) = f'(x)dx.$$

On a également démontré que, si on donne à la variable x un accroissement dx, df représente l'accroissement dans la direction de y si, au lieu de suivre la courbe $y = f(x)$, on suit la tangente au graphique de cette courbe. Si l'accroissement dx est suffisamment petit, $df(x)$ donne une approximation assez précise de l'accroissement de la valeur de $f(x)$.

La *différentielle partielle* par rapport à x d'une fonction de deux variables $z = f(x, y)$ est définie comme

$$d_x f = \frac{\partial f}{\partial x} dx,$$

et la *différentielle partielle* par rapport à y de cette fonction est définie par

$$d_y f = \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

La *différentielle totale* de la fonction est la somme de toutes les différentielles partielles, c'est-à-dire

$$df = d_x f + d_y f = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Exemple 4. Les différentielles partielles de la fonction $f(x, t) = \sin(x - 2t)$ sont données par

$$d_x f = \cos(x - 2t)dx, \qquad d_t f = -2\cos(x - 2t)dt,$$

et la différentielle totale est donc

$$df = \cos(x - 2t)dx - 2\cos(x - 2t)dt.$$

Pour les fonctions de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ la différentielle totale est définie de la même façon, donc

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Exercice 3. Calculez toutes les différentielles partielles ainsi que les différentielles totales des fonctions de l'exercice précédente.

Comme la notion de la différentielle d'une fonction d'une seule variable, les différentielles partielles et totale ont une interprétation géométrique. En effet, si on laisse varier la variable x en tenant constant la variable y, on considère l'intersection de la surface $z = f(x, y)$ avec le plan vertical $y = y_0$. Si on donne alors à x un accroissement dx, la différentielle partielle $d_x f$ donne l'accroissement de z si, au lieu de considérer la surface, on considère la tangente à la ligne d'intersection. De la même manière, la différentielle partielle $d_y f$ peut être considérée comme l'accroissement en z si on considère la tangente à la courbe d'intersection de la surface avec le plan vertical $x = x_0$ et on donne à la variable y un accroissement dy. Si on donne à x un accroissement dx et à y un accroissement dy, la différentielle totale df nous donne l'accroissement en z si, au lieu de la surface $z = f(x, y)$, on considère le plan tangent à la surface (le plan qui contient les deux tangentes considérées ci-dessus).

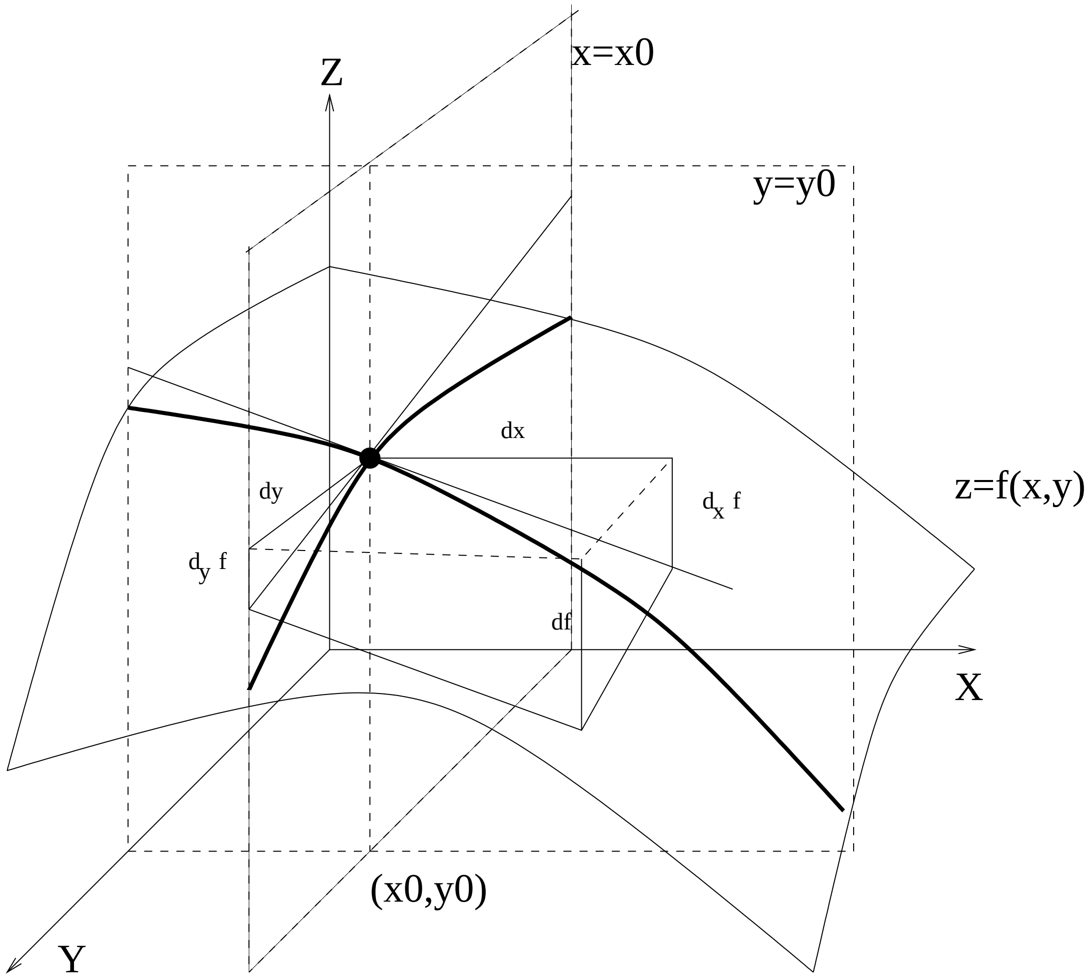

Figure 35. *Interprétation géométrique des différentielles partielles et totales.*

Il est clair que, si les accroissements dx et dy sont suffisamment petits, la différentielle totale donne une approximation assez précise du changement de la valeur $z = f(x, y)$.

5. La règle de chaîne

Supposons maintenant que $z = f(x, y)$ est une fonction de deux variables, et que $x = g(t)$ et $y = h(t)$ sont deux fonctions d'une seule variable. Nous pouvons alors construire une nouvelle fonction d'une seule variable, qui associe au nombre réel t le nombre réel $z = f(g(t), h(t))$. La dérivée de cette fonction par rapport à la variable t est appelée la *dérivée totale* de la fonction. Cette dérivée totale peut être calculée comme

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Pour une fonction de n variables, on peut généraliser cette formule comme suit:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Exemple 5. La distance (jusqu'à l'origine $(0,0)$) d'un point (x,y) du plan est donnée par une fonction de deux variables

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Pour décrire le mouvement d'un point dans le plan on donne les coordonnées du point en fonction du temps, par exemple

$$x=\sin t, \qquad y=\sin 2t.$$

Le changement de la distance du point jusqu'à l'origine en fonction du temps est alors donné par la dérivée totale de la fonction $f(x,y)$, c'est-à-dire que

$$\frac{dz}{dt}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos t+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}2\cos(2t)=\frac{\sin t\cos t}{\sqrt{\sin^2 t+\sin^2 2t}}+\frac{2\sin 2t\cos 2t}{\sqrt{\sin^2 t+\sin^2 2t}}.$$

Supposons ensuite que $z=f(x,y)$ est une fonction de deux variables, et que $x=g(s,t)$ et $y=h(s,t)$ sont aussi des fonctions de deux variables. On peut alors construire une fonction de deux variables qui associe aux nombres réels s et t le nombre réel

$$z=f(g(s,t),h(s,t)).$$

La dérivée partielle de cette fonction par rapport aux variables s et t est alors donnée par

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Si la fonction f dépend de n variables $x_1,x_2,\ldots,x_n$, et si chacune de ces variables est écrite en fonction de m variables $y_1,y_2,\ldots,y_m$, on peut démontrer que, pour toutes les valeurs de $i=1,2,\ldots,m$,

$$\frac{\partial z}{\partial y_i}=\frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_i}+\frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_i}+\ldots+\frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_i}.$$

Exemple 6. La distance jusqu'à l'origine d'un point du plan est décrite par la fonction de deux variables

$$z=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Si on utilise les coordonnées polaires (ϱ,θ) au lieu des coordonnées (x,y), on introduit une transformation

$$x=\varrho\cos\theta, \qquad y=\varrho\sin\theta.$$

On voit alors que

$$\frac{\partial z}{\partial \varrho}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varrho}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varrho}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\theta+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\theta=\frac{\varrho\cos^2\theta+\varrho\sin^2\theta}{\varrho}=1.$$

En plus, on voit que

$$\frac{\partial z}{\partial \theta}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\varrho\sin\theta+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\varrho\cos\theta=0.$$

Exercice 4. Calculez la dérivée totale de la fonction z par rapport à la variable t, pour les fonctions
$$z = x^2 + 3xy + 5y^2, \qquad x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

Exercice 5. Même question pour
$$z = \ln(x^2 + y^2), \qquad x = e^{-t}, \quad y = e^t.$$

Exercice 6. Calculez la dérivée totale de z par rapport à x pour
$$z = x^2 + 2xy + y^2, \qquad y = e^x.$$

Exercice 7. Considérons les fonctions
$$z = x^2 + xy + y^2, \qquad x = 2r + s, \quad y = r - 2s.$$
Calculez les dérivées partielles de z par rapport aux variables r et s.

Exercice 8. Même question pour les fonctions
$$z = x^2 + y^2, \qquad x = r\cos s, \quad y = r\sin s.$$

Chapitre 7

Quelques théorèmes importants

Théorème 1. (Le théorème de Rolle) *Soit $y = f(x)$ une fonction réelle qui est continue sur l'intervalle $[a, b]$ et différentiable en chaque point de l'intervalle $]a, b[$, et supposons en plus que $f(a) = f(b) = 0$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ où la tangente au graphique de la fonction est horizontale, c'est-à-dire, $f'(x_0) = 0$.*

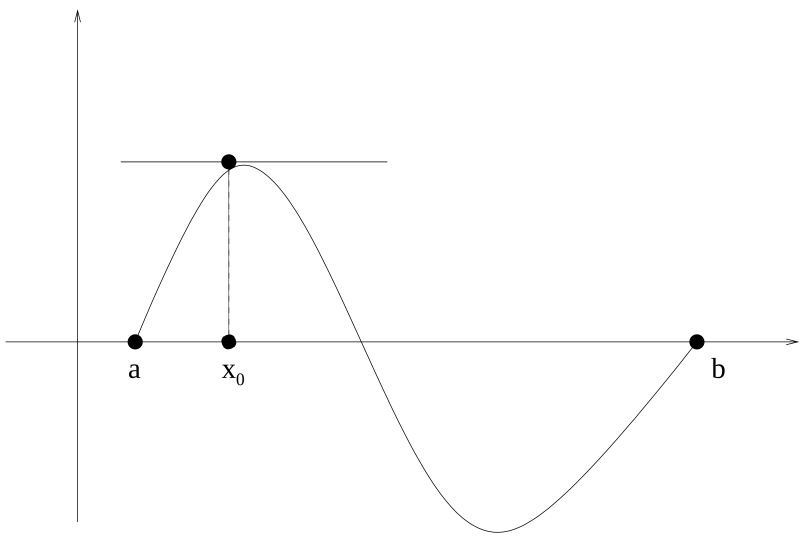

Figure 36. *Le théorème de Rolle.*

Démonstration. D'abord, si la fonction f est constante, $f'(x) = 0$ pour chaque point $x \in]a, b[$. On peut alors choisir n'importe quel point x_0 dans l'intervalle $]a, b[$.

Supposons maintenant que la fonction f n'est pas constante. Comme f est une fonction continue dans l'intervalle $[a, b]$ on sait qu'elle atteint un minimum et un maximum dans cet intervalle. En plus, la fonction f n'est pas constante et le minimum et le maximum sont, par conséquent, différents. Comme $f(a) = f(b)$, au moins un de ces points extrêmes est situé à l'intérieur de l'intervalle, c'est-à-dire que la fonction atteint un minimum ou un maximum en un point $x_0 \in]a, b[$. Finalement, il suit du fait que la fonction est différentiable dans l'intervalle $]a, b[$ que la fonction est stationnaire dans ce point x_0, impliquant que $f'(x_0) = 0$.

∎

Théorème 2. **(Le théorème de Lagrange)** *Soit $y = f(x)$ une fonction réelle qui est continue dans l'intervalle $[a, b]$ et différentiable en chaque point de l'intervalle $]a, b[$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ où la tangente est parallèle à la droite qui passe par les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, c'est-à-dire que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

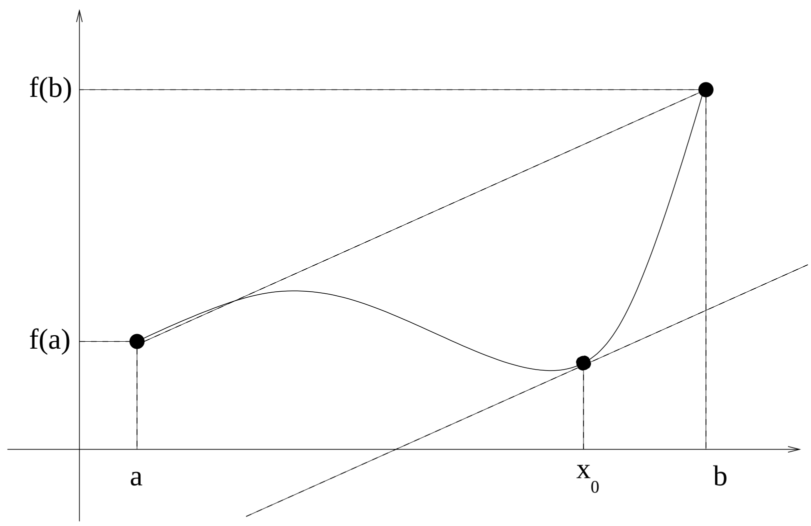

Figure 37. *Le théorème de Lagrange.*

Démonstration. Pour un point arbitraire $x \in [a, b]$, la différence entre la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et le graphique de la fonction $y = f(x)$ est donnée par

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right).$$

Il est facile à vérifier que

$$F(a) = 0, \quad F(b) = 0.$$

En plus, la fonction $y = F(x)$ est différentiable en chaque point de l'intervalle $]a, b[$ et continue en $[a, b]$. Le théorème de Rolle nous donne alors l'existence d'un point $x_0 \in]a, b[$ pour lequel $F'(x_0) = 0$. Comme

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

il suit immédiatement que

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

∎

Théorème 3. **(Le théorème de Cauchy)** *Soient f et g deux fonctions réelles qui sont continues dans l'intervalle $[a, b]$ et différentiables en chaque point de l'intervalle $]a, b[$. Supposons, en plus, que $g'(x) \neq 0$ en chaque point $x \in]a, b[$. Alors il existe au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Démonstration. Considérons la fonction $y = F(x)$, où

$$F(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a))\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Il est clair que cette fonction satisfait toutes les conditions du théorème de Rolle, et qu'il existe donc au moins un point $x_0 \in]a, b[$ tel que $F'(x_0) = 0$.

Comme $F'(x) = f'(x) - g'(x)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ le résultat suit immédiatement.

∎

Théorème 4. **(La règle de de l'Hopital)** *Soient f et g deux fonctions qui satisfont toutes les conditions du théorème de Cauchy sur un intervalle $[A, B]$ qui contient le point $a \in \mathbb{R}$. Supposons, en plus, que $f(a) = g(a) = 0$. Si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, on a*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Démonstration. Choisissons un point arbitraire $x \in]A, B[$. Il est clair que les fonctions f et g satisfont toutes les conditions du théorème de Cauchy sur l'intervalle $[a, x]$, et qu'il existe donc un point $x_0 \in]a, x[$ tel que

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Pour calculer la limite du quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ pour x tendant vers a il faut déterminer la limite de la suite d'images $\frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ pour une suite arbitraire de nombres x_n tendant vers a. Supposons que x_n est une telle suite tendant vers a. Pour chaque élément x_n de cette suite il existe alors un point $x_{0n} \in]a, x_n[$ tel que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(x_{0n})}{g'(x_{0n})}.$$

Comme x_{0n} est situé entre a et x_n, il est évident que la suite des nombres x_{0n} tend vers a. La suite des images $\frac{f'(x_{0n})}{g'(x_{0n})}$ tendra donc vers $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, et on conclut que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

■

La règle de de l'Hopital nous permet de résoudre, si certaines conditions sont satisfaites, des limites indéterminées du type $\frac{0}{0}$.

Exemple 1. Il est clair que les fonction $y = \sin x$ et $y = x$ s'annulent dans le point $x = 0$. Comme ces fonctions satisfont les conditions du théorème, on peut conclure que

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1,$$

La règle de de l'Hopital peut être utilisée pour résoudre quelques autres classes de limites indéterminées.

1. On peut aussi utiliser la règle de de l'Hopital pour calculer des limites quand x tend vers l'infini.

2. On peut, en plus, résoudre des limites indéterminées du type $\frac{\infty}{\infty}$.

Exemple 2. Les fonctions $y = 2x + 3$ et $y = 3x - 1$ tendent vers l'infini quand x tend vers l'infini. Application de la règle de de l'Hopital nous montre alors que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 3}{3x - 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Si la limite du quotient $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ contient, de nouveau, une indétermination du type $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on peut répéter l'application de la règle de de l'Hopital jusqu'à l'obtention d'un résultat qui n'est plus indéterminé.

Exemple 3. En appliquant la règle de de l'Hopital deux fois, on voit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^2 x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\frac{1}{x}}{1}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

4. On peut aussi utiliser la règle de de l'Hopital pour résoudre les autres types d'indéterminations.

Pour résoudre les indéterminations du type $0\cdot\infty$, on écrit

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}.$$

Cette dernière limite peut alors être calculée à l'aide de la règle de de l'Hopital.

Exemple 4.

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0.$$

Les indéterminations du type 0^0, ∞^0 et 1^∞ peuvent être résolues en remarquant que

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to a}e^{g(x)\ln(f(x))}=e^{\lim_{x\to a}g(x)\ln(f(x))}.$$

La limite dans l'exponent de cette dernière expression peut alors être calculée à l'aide de la règle de de l'Hopital.

Exemple 5. La régle de de l'Hopital et le résultat de l'exemple précédent nous montrent que

$$\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to0^+}x\ln x}=e^0=1.$$

Finalement, pour résoudre les indéterminations du type $\infty-\infty$, on écrit

$$\lim_{x\to a}f(x)-g(x)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}},$$

et on calcule cette dernière limite à l'aide de la règle de de l'Hopital.

Exemple 6. Si on applique la règle de de l'Hopital deux fois, on voit que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}&=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}\\&=0.\end{aligned}$$

Exercice 1. Calculez les limites suivantes.

1. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$
3. $\lim_{x \to +\infty} x^4 e^{-x^2}$
4. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$
5. $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$
7. $\lim_{x \to 0} x \ln x$
8. $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$
9. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^3}$
10. $\lim_{x \to 0} (\sin x)^x$
11. $\lim_{x \to 0} (1 - \cos x)^{\sin x}$
12. $\lim_{x \to 0} (e^x - 3x)^{\frac{1}{x}}$
13. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x)$
14. $\lim_{x \to +\infty} (e^x - 3x)^{\frac{1}{x}}$

Chapitre 8

La formule de Taylor-MacLaurin

1. Introduction

Supposons que $y = f(x)$ est une fonction réelle qui, en un point $a \in \mathrm{dom}(f)$, peut être dérivée n fois. On peut alors construire une fonction polynomiale de degré n,

$$y = P_n(x), \qquad P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n,$$

telle que, dans le point a, la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre n prennent les mêmes valeurs que le polynôme P_n et ses dérivées jusqu'à l'ordre n.

Définition 1. *La factorielle d'un nombre naturel strictement positif $n \in \mathbb{N}_0$ est définie par*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

On définit aussi

$$0! = 1.$$

Il suit de la définition que, pour les nombres strictement positifs,

$$n! = n(n-1)!.$$

Exemple 1.

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120, \qquad 6! = 6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720.$$

Pour déterminer le polynôme P_n, on remarque d'abord que

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n \\
P_n'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \ldots + na_n(x-a)^{n-1} \\
P_n''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x-a) + 12a_4(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2} \\
&\vdots \\
P_n^{(i)}(x) &= i!a_i + \ldots + n(n-1)\ldots(n-i+1)a_n x^{n-i} \\
&\vdots \\
P_n^{(n)}(x) &= n!a_n,
\end{aligned}$$

Les coefficients $a_0, \ldots, a_n$ du polynôme P_n doivent donc être choisis de manière que

$$\begin{aligned}
f(a) &= P_n(a) = 0!a_0, \\
f'(a) &= P_n'(a) = 1!a_1, \\
f''(a) &= P_n''(a) = 2!a_2, \\
&\vdots \\
f^{(i)}(a) &= P_n^{(i)}(a) = i!a_i, \\
&\vdots \\
f^{(n)}(a) &= P_n^{(n)}(a) = n!a_n,
\end{aligned}$$

et on obtient donc que

$$a_i = \frac{f^{(i)}(a)}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Par conséquent, le polynôme P_n prend la forme

$$P_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

Exemple 2. Supposons que $f(x) = \sin(x)$ et $a = 0$. Il suit alors que

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin(x), & f(0) &= 0, \\
f'(x) &= \cos(x), & f'(0) &= 1, \\
f''(x) &= -\sin(x), & f''(0) &= 0, \\
f'''(x) &= -\cos(x), & f'''(0) &= -1, \\
f^{(4)}(x) &= \sin(x), & f^{(4)}(0) &= 0, \\
f^{(5)}(x) &= \cos(x), & f^{(5)}(0) &= 1, \\
f^{(6)}(x) &= -\sin(x), & f^{(6)}(0) &= 0,
\end{aligned}$$

et le polynôme $P_6(x)$ s'écrit donc

$$P_6(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Exercice 1. Calculez $P_6(x)$ pour les fonctions $f(x) = \cos(x)$ et $f(x) = e^x$, où $a = 0$.

Exercice 2. Calculez $P_6(x)$ pour les fonctions $f(x) = \sin(x)$ et $f(x) = \cos(x)$, quand $a = \frac{\pi}{3}$.

2. La formule de Taylor-MacLaurin

Dans le paragraphe précédent on a associé un polynôme à chaque choix d'un nombre naturel n et d'une fonction $y = f(x)$. Il est clair que le polynôme P_n et la fonction f prennent la même valeur dans le point a. En plus, la tangente aux graphiques de ces deux fonctions dans le point a coïncident. On peut alors se demander si la fonction polynomiale $y = P_n(x)$ donne une bonne approximation pour la fonction $y = f(x)$ dans les points x près de a. Pour répondre à cette question, il faut calculer la différence

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

entre l'image $f(x)$ du point x sous la fonction f et la valeur "approximative" $P_n(x)$. Ceci nous mène au théorème suivant:

Théorème 1. **(La formule de Taylor)** *Supposons que la fonction $y = f(x)$ est différentiable $n+1$ fois aux environs d'un point $a \in \mathrm{dom}(f)$ et que $P_n(x)$ est la fonction polynomiale de degré n construit comme avant. Alors il existe un nombre $x_0 \in]a, x[$ tel que*

$$f(x) = P_n(x) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0).$$

Démonstration. Avec les notations introduites avant, on sait que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Comme $f(a) = P_n(a)$, on a aussi $R_n(a) = 0$ et nous pouvons donc écrire

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

Pour une valeur de x fixée, construisons maintenant une fonction F définie par

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1!} f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!} f''(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} Q(x).$$

La fonction F est clairement continue dans l'intervalle $[a, x]$ et différentiable dans l'intervalle $]a, x[$. En plus, on sait que

$$F(a) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{1!}f'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x)$$
$$= f(x) - R_n(x) - P_n(x) = 0.$$

Il est aussi évident que $F(x) = 0$. La fonction F satisfait donc toutes les conditions du théorème de Rolle, ce qui implique l'existence d'un point $x_0 \in]a, x[$ tel que $F'(x_0) = 0$.

Dérivation de la fonction F par rapport à la variable t nous montre que

$$F'(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q(x).$$

Comme on sait que $F'(x_0) = 0$, la substitution $t = x_0$ dans cette formule nous montre que

$$Q(x) = f^{(n+1)}(x_0).$$

∎

Si on met $a = 0$ dans le résultat précédent, on obtient

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

où

$$P_n(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0),$$
$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0),$$

pour un point $x_0 \in]0, x[$. Ce résultat spécial est appelé la *formule de MacLaurin*.

Exemple 3. Soit $x = \frac{\pi}{10}$, $n = 6$, $f(x) = \sin(x)$ et $a = 0$. Alors on voit que

$$P_6(\frac{\pi}{10}) = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{10})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{10})^5 \sim 0.309017.$$

Selon la formule de MacLaurin

$$R_6(\frac{\pi}{10}) = \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{10})^7(-\cos(x_0)),$$

pour un certain $x_0 \in]0, \frac{\pi}{10}[$. Comme les valeurs possibles du cosinus se trouvent toujours entre -1 et 1, on conclut que

$$|R_6(\frac{\pi}{10})| \leq \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{10})^7 \sim 0.6 \cdot 10^{-7} < 10^{-6}.$$

Par conséquent, si on utilise l'approximation $\sin(\frac{\pi}{10}) = P_6(\frac{\pi}{10})$ l'erreur est plus petit que 10^{-6}.

Exercice 3. Calculez $\cos(\frac{\pi}{4})$ à l'aide de $P_4(x)$. Quelle est la précision de cette approximation?

Exercice 4. Calculez e à cinq décimaux précis.

Exercice 5. Calculez $\sqrt{101}$ à trois décimaux précis.

3. La série de Taylor-MacLaurin

Supposons maintenant que la fonction f admet un nombre illimité de dérivées en un point $a \in \operatorname{dom}(f)$. Alors on peut calculer la fonction polynomiale $y = P_n(x)$ pour un nombre arbitraire $n \in \mathbb{N}$, et on obtient une suite de fonctions polynomiales

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a), \\
P_2(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a), \\
P_3(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Si la différence $R_n(x)$ entre $f(x)$ et le polynôme $P_n(x)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on conclut que $f(x)$ s'écrit comme une série (infinie)

$$f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \dots,$$

qu'on appelle la *série de Taylor*. Dans le cas spécial où $a = 0$ cette série s'appelle la *série de MacLaurin*.

Exemple 4. Pour $f(x) = \sin(x)$, la série de MacLaurin est donnée par

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots.$$

Exemple 5. De la même façon, on voit que

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

et que la fonction exponentielle a une série de MacLaurin donnée par

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Exercice 6. Calculez la série de MacLaurin de la fonction $y = \frac{1}{1-x}$.

Exercice 7. Calculez la série de Taylor de la fonction $y = \ln x$ autour du point $a = 1$.

Exercice 8. Calculez la série de Taylor de la fonction $f(x) = \sin(x)$ autour du point $a = \frac{\pi}{3}$. Utilisez cette série pour calculer le sinus d'un angle de 62 degrés.

Chapitre 9

Les nombres complexes

1. Définition

Dans les chapitres précédents, on a toujours considéré l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. On a vu que le carré d'un tel nombre réel est toujours positif, et que, par conséquent, il n'existe aucun nombre réel x tel que

$$x^2 + 1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad x^2 = -1.$$

Pour résoudre une équation quadratique arbitraire,

$$ax^2 + bx + c = 0$$

il faut d'abord calculer le *discriminant* de cette équation. Ceci est le nombre réel donné par

$$D = b^2 - 4ac.$$

Si le discriminant D est positif, on peut calculer sa racine carrée $\sqrt{D}$, et on sait alors que les solutions de l'équation sont données par les nombres réels

$$\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Si le discriminant D est négatif, on ne peut pas calculer sa racine carrée (c'est-à-dire, il n'existe aucun nombre réel x tel que $x^2 = D$) et dans ce cas l'équation quadratique n'admet pas de solutions réelles.

Pour résoudre ces problèmes, on introduit dans ce chapitre un nouvel ensemble de nombres, qu'on appellera les *nombres complexes.* A cet effet, on introduit d'abord un nouveau "nombre", qu'on dénotera par j et qui satisfait la condition

$$j^2 = -1.$$

Définition 1. *Un nombre complexe est une expression de la forme $a + bj$, où a et b sont des nombres réels arbitraires. Pour chaque nombre complexe $z = a + bj$ on appelle $a = \mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z, et $bj = \mathrm{Im}(z)$ la partie imaginaire de z. Si $b = 0$, $z = a$ est un nombre réel, si $a = 0$ on dit que $z = bj$ est un nombre imaginaire. L'ensemble de tous les nombres complexes sera dénoté par le symbole $\mathbb{C}$. Pour chaque nombre complexe $z = a + bj$ on définit un nombre complexe $\bar{z} = \overline{a + bj} = a - bj$, qu'on appelle le conjugué complexe de z.*

2. Règles de calcul

Définition 2. *Soient $z_1 = a + bj$ et $z_2 = c + dj$ deux nombres complexes. On définit*

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)j, \\ z_1 - z_2 &= (a - c) + (b - d)j, \\ z_1 \cdot z_2 &= (ac - bd) + (ad + bc)j, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j. \end{aligned}$$

Ces définitions montrent que le calcul avec les nombres complexes se fait à peu près de la même manière que le calcul avec les nombres réels. Le symbole j est considéré comme un nombre inconnu dans toutes les expressions, et on remplace j^2 par -1 où cela est possible.

Exemple 1. Cette technique nous montre que

$$(a + bj)(c + dj) = ac + bcj + adj + bdj^2 = ac + bcj + adj - bd = (ac - bd) + (ad + bc)j.$$

On voit aussi que

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{(a + bj)(c - dj)}{(c + dj)(c - dj)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)j}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j.$$

Exercice 1. Calculez ou simplifiez les expressions suivantes.

1. $(-7+3j)+(2-j)$
2. $(3+2j)+(3-2j)$
3. $j+(\overline{1+2j})$
4. $(-2+\sqrt{2}j)-(-2+\sqrt{2}j)$
5. $(3-2j)(2+3j)$
6. $(1-j)(1+j)$
7. $j(2+j)$
8. $(\frac{1}{2}-j)(\frac{1}{2}+j)(\overline{1+j})$
9. $(2+3j)^2$
10. $(1-3j)^3$
11. $(2-j)^4$
12. j^3
13. j^5
14. j^{35}
15. $(1+2j)^{-1}$
16. $\dfrac{3}{2-j}$
17. $\dfrac{2+j}{3+4j}$
18. $\dfrac{(2-3j)(3+4j)}{(6+4j)(\overline{15+8j})}$
19. $\dfrac{-3j\sqrt{8}}{8j^3\sqrt{3}}$
20. $\dfrac{1+2j}{3-2j}+\dfrac{3+2j}{1-2j}$

En utilisant les nombres complexes, on peut maintenant résoudre les équations quadratiques dont le discriminant est négatif. On obtient alors deux solutions complexes.

Exemple 2. Le discriminant de l'équation $x^2-10x+26=0$ est donné par

$$D = 10^2 - 4\cdot 26 = -4 = (\pm 2j)^2.$$

Les solutions (complexes) de l'équation prennent donc la forme

$$\frac{10+2j}{2} = 5+j, \qquad \frac{10-2j}{2} = 5-j.$$

Si on admet donc les nombres complexes comme des solutions, on peut résoudre n'importe quelle équation quadratique. Ce résultat peut être formulé de façon plus générale. En effet, un théorème fondamental d'algèbre nous montre que *chaque* équation polynomiale

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

(où $a_n \neq 0$, a_n des nombres complexes) admet exactement n solutions complexes. Si, en plus, les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, les solutions de cette équation forment des paires: si $a+bj$ est une solution, le conjugué complexe $a-bj$ en est une autre.

Exercice 2. Calculez les solutions des équations suivantes.

1. $x^2+16=0$
2. $x^2-2x+2=0$
3. $x^3-5x^2+9x-5=0$
4. $x^4-1=0$
5. $x^2-30x+289=0$
6. $x^2-(2+3j)x-1+3j=0$
7. $x^3+jx^2+x+j=0$
8. $x^2+2jx+3=0$

3. Représentation graphique

Chaque nombre complexe $z = a + bj$ est représenté par un point du plan dont les coordonnées sont (a, b). On obtient alors le *plan complexe* ou le *diagramme d'Argand.*

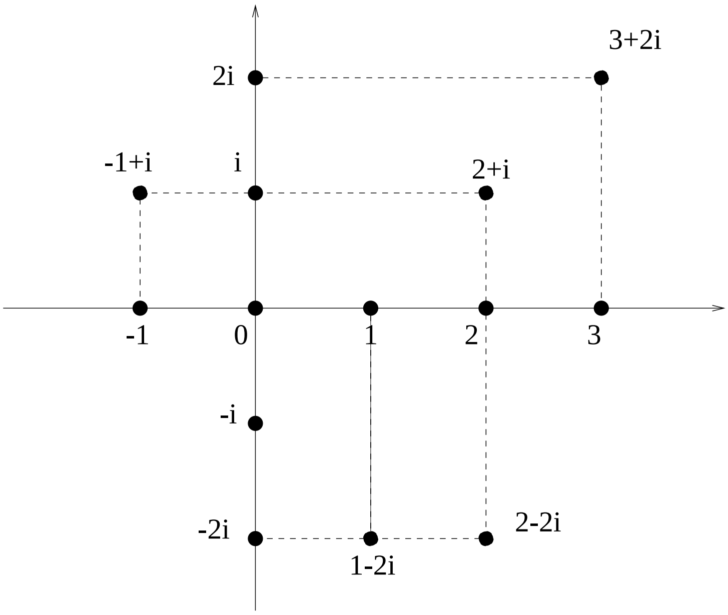

Figure 38. *Quelques nombres complexes avec leur représentation graphique.*

Addition et soustraction de deux nombres complexes peuvent être représentées graphiquement comme suit.

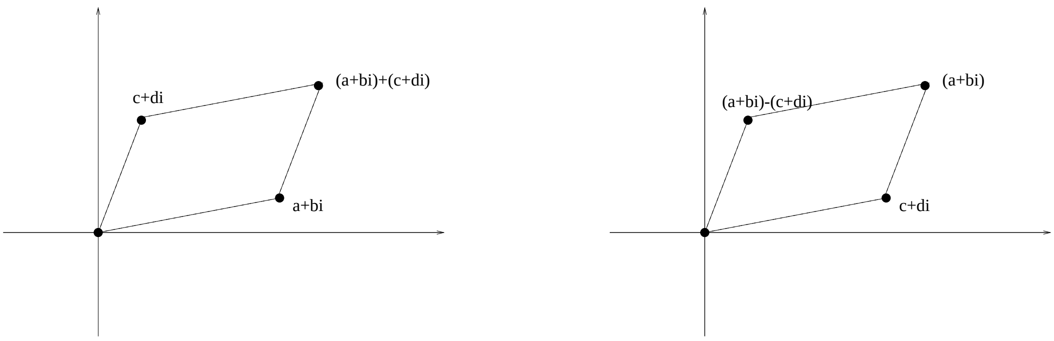

Figure 39. *Somme et différence de nombres complexes.*

4. Représentation trigonométrique

Définition 3. *Le module d'un nombre complexe $z = a + bj$ est donné par*

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

L'argument d'un nombre complexe est l'angle θ formé par l'axe horizontale et la droite orientée passant par 0 et z.

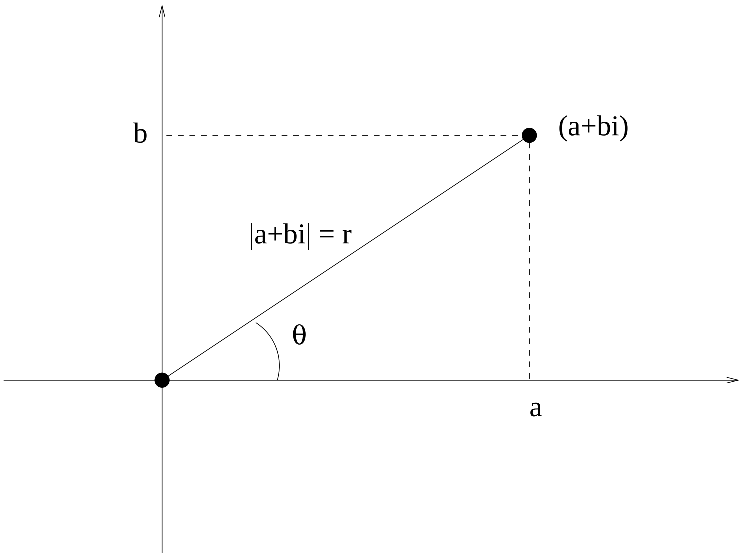

Figure 40. *Module et argument d'un nombre complexe.*

Considérons maintenant le nombre complexe z dont le module est égal à r et l'argument est θ. Il suit alors du diagramme précédent que

$$a = r\cos\theta, \qquad b = r\sin\theta,$$

et le nombre complexe z peut donc être représenté par

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta).$$

Cette représentation s'appelle la *représentation trigonométrique* du nombre complexe.

Pour calculer la représentation trigonométrique d'un nombre complexe $z = a + bj$, nous remarquons que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}.$$

L'argument θ n'est pas uniquement déterminé par cette expression, parce que

$$\operatorname{tg}(\theta + \pi) = \operatorname{tg}\theta.$$

Pour déterminer l'argument θ complètement, il faut tenir compte du quadrant dans lequel le point $a + bj$ est situé.

Exemple 3. Pour déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe $z = 1 - j$ on remarque que

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = -1.$$

Par conséquent, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. Comme le point $1-j$ est situé dans le quatrième quadrant, on voit que

$$\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi,$$

et on conclut que $\theta = \frac{7\pi}{4}$. La représentation trigonométrique de $z = 1 - i$ prend donc la forme

$$\sqrt{2}\left(\cos(\frac{7\pi}{4}) + j\sin(\frac{7\pi}{4})\right).$$

Exercice 3. Déterminez la représentation trigonométrique des nombres complexes suivants.

$$\sqrt{3}+j$$
$$\sqrt{3}-j$$
$$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}j$$
$$2(j-1)$$

L'avantage de la représentation trigonométrique des nombres complexes devient clair dans le théorème suivant.

Théorème 1. *Soient $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + j\sin\theta_1)$ et $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + j\sin\theta_2)$ deux nombres complexes avec ses représentations trigonométriques. Alors on a*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + j\sin(\theta_1+\theta_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + j\sin(\theta_1-\theta_2)).$$

Pour un nombre naturel arbitraire n il suit que

$$z^n = r^n(\cos\theta + j\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + j\sin(n\theta)).$$

Cette dernière expression s'appelle la formule de de Moivre.

Exercice 4. Elevez les nombres complexes de l'exercice précédente aux puissances deux, trois et quatre.

On peut utiliser la formule de de Moivre pour calculer les n-ièmes racines d'un nombre complexe $z = a + bj$, c'est-à-dire de chercher tous les nombres complexes w tels que $w^n = z$, ou de résoudre l'équation polynomiale $x^n = a + bj$. Supposons, à cet effet, que $z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ est la représentation du nombre complexe $a + bj$. Il est alors évident que les nombres complexes

$$r^{\frac{1}{n}}(\cos(\frac{\theta+2\pi k}{n}) + j\sin(\frac{\theta+2\pi k}{n})), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

sont les n-ièmes racines de z. Ces nombres complexes forment un polygone régulier avec n sommets dans le plan complexe.

Exemple 4. Afin de calculer les racines cubes du nombre complexe $z = 8j$, on détermine d'abord la représentation trigonométrique de ce nombre. Ceci prend la forme

$$8j = 8(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}),$$

et les racines cubes sont donc données par

$$2(\cos\frac{\pi}{6} + j\sin\frac{\pi}{6}), \qquad 2(\cos\frac{5\pi}{6} + j\sin\frac{5\pi}{6}), \qquad 2(\cos\frac{9\pi}{6} + j\sin\frac{9\pi}{6}).$$

Exemple 5. Le discriminant de l'équation quadratique $x^2 + 2jx + j = 0$ est égal à

$$D = (2j)^2 - 4j = -4 - 4j.$$

Pour déterminer les solutions de cette équation quadratique, il faut d'abord calculer les racines carrées du discriminant. La forme trigonométrique du discriminant est donnée par

$$D = \sqrt{8}(\cos\frac{5\pi}{4} + j\sin\frac{5\pi}{4}),$$

et les racines carrées sont donc

$$w_1 = \sqrt[4]{8}(\cos\frac{5\pi}{8} + j\sin\frac{5\pi}{8}), \qquad w_2 = \sqrt[4]{8}(\cos\frac{13\pi}{8} + j\sin\frac{13\pi}{8}).$$

Les solutions de l'équation sont alors de la forme

$$\frac{-2j + w_1}{2}, \qquad \frac{-2j + w_2}{2}.$$

Exemple 6. Les nombres complexes

$$\cos\frac{2\pi k}{n} + j\sin\frac{2\pi k}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

sont les n-ièmes racines du nombre complexe 1 (qui a module $r = 1$ et argument $\theta = 0$), et ils forment donc toutes les solutions de l'équation polynomiale

$$x^n - 1 = 0.$$

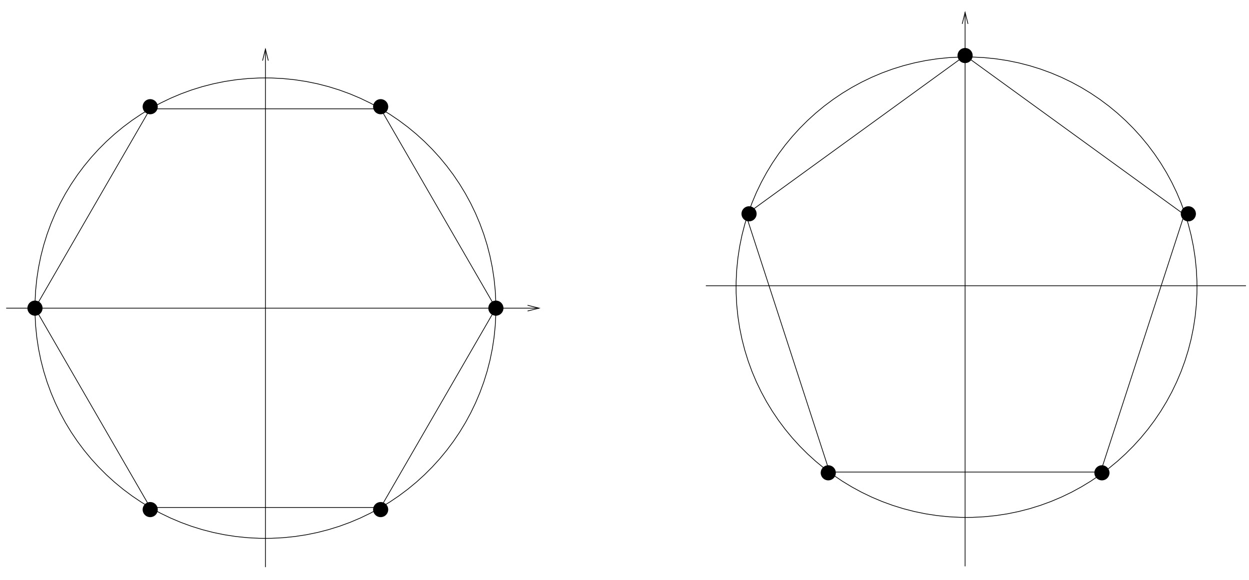

Figure 41. *Les sixièmes racines de 1 et les cinquièmes racines de j.*

Exercice 5. Calculez les racines d'ordre deux, trois et quatre des nombres complexes de l'exercices précédente.

Exercice 6. Calculez les racines cubes de 1 et de -1.

Exercice 7. Déterminez toutes les solutions des équations suivantes.

1. $x^3 - 1 = 0$
2. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$
3. $x^4 + 1 = 0$
4. $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ $\quad$ ($2i$ est une solution)
5. $x^3 + 9x - 26 = 0$

5. Représentation exponentielle

Dans le Chapitre 8 on a vu que

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \ldots, \\ \cos\theta &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \ldots, \\ e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots. \end{aligned}$$

Si on remplace x par $j\theta$ dans la dernière expression, on obtient la *formule d'Euler*,

$$\begin{aligned} e^{j\theta} &= 1 + j\frac{\theta}{1!} + j^2\frac{\theta^2}{2!} + j^3\frac{\theta^3}{3!} + \ldots \\ &= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots \\ &\qquad + j\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \ldots\right) \\ &= \cos\theta + j\sin\theta. \end{aligned}$$

On peut donc représenter les nombres complexes d'une troisième manière, qu'on appellera la *représentation exponentielle.* Cette forme est donnée par

$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta) = re^{j\theta} = e^{\ln r + j\theta},$$

et il est évident que

$$e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x(\cos y + j\sin y).$$

Cette représentation des nombres complexes est très intéressante pour certaines applications, parce qu'elle nous permet de faire certains calculs aux nombres réels d'une façon très simple. En effet, il suit de la formule de de Moivre que

$$\begin{aligned} r_1e^{j\theta_1} \cdot r_2e^{j\theta_2} &= r_1r_2e^{j(\theta_1+\theta_2)}, \\ \frac{r_1e^{j\theta_1}}{r_2e^{j\theta_2}} &= \frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)}, \\ (re^{j\theta})^n &= r^ne^{jn\theta}, \end{aligned}$$

et on conclut que, pour les nombres complexes en forme exponentielle, les règles de calcul sont les mêmes que pour les fonctions exponentielles aux exposants réels. En plus, les n-ièmes racines du nombre complexe $re^{j\theta}$ sont données par

$$r^{\frac{1}{n}} e^{j\frac{\theta+2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Exemple 7. Les formules montrent que

$$e^{j\pi} = \cos\pi + j\sin\pi = -1, \qquad e^{3+j\frac{\pi}{2}} = e^3(\cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}) = je^3.$$

Exercice 8. Faites les Exercices 3,4,5 et 6 en utilisant la notation exponentielle.

Chapitre 10

Intégrales indéfinies

1. Introduction

Dans les chapitres précédents nous avons introduit et étudié la fonction dérivée d'une fonction réelle $y = f(x)$. Dans ce chapitre nous introduisons l'opération inverse de la dérivation. Nous cherchons donc toutes les fonctions $F(x)$ dont la fonction dérivée est égale à une fonction donnée $f(x)$. Cette opération s'appelle *l'intégration (indéfinie)*. Les intégrales indéfinies joueront un rôle très important dans la solution des équations différentielles.

Une fonction réelle $F(x)$ telle que

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

est appelée une *intégrale indéfinie* ou une *fonction primitive* de f. La fonction primitive n'est pas unique. En effet, si la fonction F est une fonction primitive de f et C est une constante arbitraire, alors la fonction $F(x)+C$ est aussi une fonction primitive de $f(x)$. Nous obtenons donc une grande famille de fonctions primitives de la forme

$$F(x) + C,$$

où $F(x)$ est une fonction primitive et C est une constante arbitraire, qu'on appelle une *constante d'intégration.* L'ensemble de *toutes* les fonctions primitives est souvent appelé *l'intégrale indéfinie.* On dénote l'intégrale indéfinie par

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Exemple 1. La fonction $f(x) = 2x$ a comme fonction primitive la fonction $F(x) = x^2$. Toute fonction de la forme $x^2 + C$ donne une autre fonction primitive, et on écrit

$$\int 2xdx = x^2 + C.$$

Dans la suite de ce chapitre on étudie quelques techniques qui nous permettent de calculer les intégrales indéfinies de certaines familles de fonctions réelles.

2. Intégrales élémentaires

Les intégrales suivantes sont obtenues directement à partir des fonctions dérivées calculées dans les chapitres précédents.

$$\begin{aligned}
&\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx,\\
&\int af(x)dx = a\int f(x)dx, \qquad a \in \mathbb{R}\\
&\int f'(x)dx = f(x) + C,\\
&\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad -1 \neq n \in \mathbb{R},\\
&\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\\
&\int \sin x dx = -\cos x + C,\\
&\int \cos x dx = \sin x + C,\\
&\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C,\\
&\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{cotg} x + C.\\
&\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C,\\
&\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos x| + C,\\
&\int \operatorname{cotg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C,\\
&\int e^x dx = e^x + C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x + C,\\
&\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + C.
\end{aligned}$$

Les intégrales suivantes seront calculées ci-dessous, mais sont souvent considérées comme des intégrales fondamentales.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2+x^2}dx &= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\\
\int \frac{1}{a^2-x^2}dx &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\\
\int \frac{1}{x^2-a^2}dx &= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx &= \arcsin\frac{x}{a}+C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx &= \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C,\\
\int \frac{1}{\sin x}dx &= \ln\left|\frac{1}{\sin x}-\operatorname{cotg}x\right|+C,\\
\int \frac{1}{\cos x}dx &= \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg}x\right|+C.
\end{aligned}$$

3. La substitution

La méthode de l'intégration par *substitution* est une des plus connues et elle est très souvent appliquée. Le principe est de remplacer la variable x par une autre variable t. En choisissant cette nouvelle variable intelligemment, on peut souvent réduire une intégrale donnée à une intégrale plus simple, qu'on résout alors en utilisant une autre méthode.

Supposons donc qu'il faut calculer l'intégrale

$$\int f(x)dx$$

d'une fonction réelle $f(x)$. On peut alors introduire une nouvelle variable t, qui est définie par $x=\varphi(t)$, ce qui implique que

$$dx=\varphi'(t)dt.$$

L'intégrale originale prend alors la forme

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Dans certains cas, cette nouvelle intégrale peut être calculée, et on obtient alors une fonction primitive $F(t)+C$, dans laquelle on remplace t de nouveau par $\varphi^{-1}(x)$.

Exemple 2. Afin de calculer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x+5}dx$$

nous introduisons la substitution

$$x+5=t, \qquad \text{ou} \qquad x=t-5.$$

Nous voyons alors que

$$dx = dt,$$

et l'intégrale prend la forme

$$\int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C.$$

Finalement, on remplace t de nouveau par $t = x + 5$ pour obtenir

$$\int \frac{1}{x+5} dx = \ln |x+5| + C.$$

Exemple 3. Calculons

$$\int \sin 2x dx.$$

On pose d'abord

$$2x = t, \qquad x = \frac{1}{2}t,$$

ce qui implique que

$$dx = \frac{1}{2}dt.$$

L'intégrale devient

$$\int \frac{1}{2} \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C,$$

et en remplaçant t par $2x$ on obtient

$$\int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C.$$

Exemple 4. Calculons

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

La substitution

$$\frac{x}{a} = t, \qquad x = at, \qquad dx = adt,$$

nous donne une intégrale

$$\frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} t + C.$$

En remplaçant t, on obtient le résultat

$$\frac{1}{a} \operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) + C.$$

Exemple 5. Calculons maintenant

$$\int x \cos x^2 dx.$$

La substitution

$$x^2 = t, \qquad 2xdx = dt,$$

nous donne

$$\int \cos t \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \frac{1}{2} \sin x^2 + C.$$

4. Intégration par parties

La dérivée d'un produit de deux fonctions est donnée par

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

En calculant l'intégrale des deux membres de cette égalité on obtient

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)dx &= \int (f(x)g(x))'dx - \int f(x)g'(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx.\end{aligned}$$

Nous pouvons donc remplacer l'intégrale d'un produit de deux fonctions par une autre intégrale, dans laquelle on a remplacé une des fonctions par son intégrale et l'autre par sa dérivée. Il faut alors introduire un terme de "correction", qui ne contient plus une intégrale. En choisissant les fonctions $f'(x)$ et $g(x)$ judicieusement, il est souvent possible de réduire l'intégrale à une intégrale plus simple.

Exemple 6. On applique l'intégration par parties pour calculer l'intégrale

$$\int x \sin x dx.$$

Pour cela, on choisit

$$f'(x) = \sin x, \quad g(x) = x.$$

Il suit alors que

$$f(x) = -\cos x, \quad g'(x) = 1,$$

et, par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= -x \cos x + \int \cos x dx \\ &= -x \cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Exemple 7. On calcule

$$\int xe^x dx.$$

On choisit

$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = x.$$

Ceci implique

$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 1,$$

et on obtient

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Exemple 8. On calcule

$$\int x^2 \ln x dx.$$

Pour ce calcul, on choisit

$$f'(x) = x^2, \qquad g(x) = \ln x,$$
$$f(x) = \frac{x^3}{3}, \qquad g'(x) = \frac{1}{x},$$

et on obtient

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

On peut aussi utiliser l'intégration par parties pour calculer les intégrales de certaines fonctions dont on connaît seulement la dérivée.

Exemple 9. Pour calculer l'intégrale

$$\int \operatorname{arctg} x dx$$

on peut choisir

$$f'(x) = 1, \qquad g(x) = \operatorname{arctg} x,$$

ce qui implique

$$f(x) = x, \qquad g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

L'intégrale s'écrit alors

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Finalement, on fait une substitution

$$t = x^2 + 1, \quad dt = 2x dx,$$

qui nous donne

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \ln |t| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C. \end{aligned}$$

On conclut que

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Dans certains cas, l'intégration par parties nous mène à une intégrale qui est "du même type" que l'intégrale originale. Dans ces cas, on peut souvent appliquer la technique une deuxième fois. Le résultat est alors une expression qui contient l'intégrale originale, avec un coefficient différent, dans les deux membres d'une égalité. On résout alors l'équation pour cette intégrale.

Exemple 10. On calcule
$$\int e^x \sin 2x dx.$$
D'abord, on pose
$$f'(x) = e^x, \quad g(x) = \sin 2x,$$
et on voit donc que
$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = 2\cos 2x.$$
L'intégration par parties nous donne
$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2\int e^x \cos 2x dx.$$
En appliquant la méthode une deuxième fois, on peut calculer
$$\int e^x \cos 2x dx$$
en choisissant
$$f'(x) = e^x, \qquad g(x) = \cos 2x,$$
et donc
$$f(x) = e^x, \quad g'(x) = -2\sin 2x.$$
On voit alors que
$$\int e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x + 2\int e^x \sin 2x dx.$$
Substitution de cette expression dans l'expression originale nous donne
$$\int e^x \sin 2x dx = e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x - 4\int e^x \sin 2x dx,$$
et il suit que
$$\int e^x \sin 2x dx = \frac{1}{5}(e^x \sin 2x - 2e^x \cos 2x) + C.$$

5. Intégration d'une fonction rationnelle

Une *fonction rationnelle* est une fonction de la forme
$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$
où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n et $Q_m(x)$ est un polynôme de degré m. Dans ce paragraphe on démontre qu'on peut calculer l'intégrale de *toute* fonction rationnelle. Pour calculer cette intégrale, on décompose la fonction rationnelle comme une *somme* d'une fonction polynomiale et d'un nombre de fonctions rationnelles plus simples, qu'on appelle des *fractions partielles*. On peut alors calculer l'intégrale de la fonction rationnelle comme la somme des intégrales de ces composantes.

Considérons donc une fonction rationnelle donnée
$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}.$$
Nous décrivons maintenant, en quelques étapes, la procédure qui nous permet de calculer l'intégrale de cette fonction.

1. Degré du dénominateur inférieur à celui du numérateur

Si $n \geq m$ on dit que la fonction rationnelle est *impropre*. Dans ce cas, on peut toujours décomposer la fonction en une somme

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = R_{n-m}(x) + \frac{S(x)}{Q_m(x)}$$

d'un polynôme $R_{n-m}(x)$ de degré $n - m$ et d'une fonction rationnelle *propre*, c'est-à-dire une fonction rationnelle dont le degré du numérateur est inférieur à celui du dénominateur. A cet effet, on fait une *division Euclidienne* des polynômes P_n et Q_m. Le polynôme $R_{n-m}(x)$ est alors donné par le quotient de cette division et le polynôme S est le reste. Pour calculer l'intégrale de la fonction rationnelle, il suffit alors de calculer l'intégrale d'un polynôme et d'une fonction rationnelle propre.

Exemple 11. La fonction rationnelle impropre

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1},$$

s'écrit comme

$$f(x) = (x-1) + \frac{1}{x+1}.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{x+1}dx &= \int ((x-1) + \frac{1}{x+1})dx \\ &= \int (x-1)dx + \int \frac{1}{x+1}dx \\ &= \frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Exemple 12. De la même manière, on voit que

$$\frac{x^4+2x^2+2}{x^2+1} = (x^2+1) + \frac{1}{x^2+1},$$

et par conséquent on a

$$\int \frac{x^4+2x^2+2}{x^2+1}dx = \frac{x^3}{3} + x + \operatorname{arctg}(x) + C.$$

2. Les fractions partielles

Chaque fonction rationnelle *propre* peut maintenant être décomposée en une somme de *fractions partielles*. Ceux-ci sont des fonctions rationnelles de la forme

$$\frac{A}{(ax+b)^n},$$

où A, a et b sont des nombres réels et n un nombre naturel différent de 0, ou de la forme

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

où A, B, a, b et c sont des nombres réels, n est un nombre naturel différent de zéro, et le discriminant b^2-4ac de l'équation quadratique

$$ax^2+bx+c=0$$

est négatif, ce qui implique que l'expression quadratique ne peut pas être décomposée en facteurs linéaires (aux coefficients réels).

Pour calculer ces fractions partielles, on calcule d'abord une décomposition en facteurs du dénominateur $Q_m(x)$ de la fonction rationnelle. Cette opération nous donne une liste de facteurs de la forme a_ix+b_i (de degré un) ou de la forme $\bar{a}_ix^2+\bar{b}_ix+\bar{c}_i$ (de degré deux). Ces derniers facteurs ont un discriminant négatif, impliquant qu'ils ne peuvent pas être décomposés en facteurs linéaires. (Il faut remarquer que ceci est, en principe, toujours possible.) Le résultat est alors une décomposition de la forme

$$\begin{aligned} Q_m(x) = (a_1x+b_1)^{n_1}\cdot(a_2x+b_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(a_kx+b_k)^{n_k}\cdot \\ (\bar{a}_1x^2+\bar{b}_1x+\bar{c}_1)^{\bar{n}_1}\cdot(\bar{a}_2x^2+\bar{b}_2x+\bar{c}_2)^{\bar{n}_2}\cdot\ldots\cdot(\bar{a}_lx^2+\bar{b}_lx+\bar{c}_l)^{\bar{n}_l}. \end{aligned}$$

Exemple 13. On donne ici quelques exemples de décompositions de ce type.

$$\begin{aligned} &x^2-4=(x-2)(x+2),\\ &x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1),\\ &x^4+3x^2+2=(x^2+1)(x^2+2),\\ &x^5+x^4+2x^3+2x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)^2. \end{aligned}$$

La décomposition en facteurs du dénominateur $Q_m(x)$ de la fonction rationnelle propre nous permet alors d'écrire la fonction rationnelle comme une somme de fractions partielles. Chaque facteur de la décomposition correspond à un ou plusieurs termes de cette décomposition. Les termes sont déterminés comme suit.

1. Un facteur linéaire $ax+b$ qui apparaît une seule fois correspond à une fraction partielle de la forme

$$\frac{A}{ax+b}.$$

2. Si un terme linéaire $ax+b$ apparaît n fois dans la décomposition, c'est-à-dire que la décomposition contient $(ax+b)^n$, il correspond à une somme de n fractions partielles

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \ldots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}.$$

3. Un terme quadratique (non-décomposable) ax^2+bx+c qui apparaît une seule fois dans la décomposition correspond à une fraction partielle de la forme

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

4. Finalement, un terme quadratique apparaissant dans la décomposition à une puissance n correspond à une somme de fractions partielles

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \ldots + \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}.$$

En appliquant cette construction pour chaque facteur de la décomposition, on obtient une somme d'un nombre de fractions partielles dont les numérateurs contiennent des coefficients indéterminés. Afin de calculer ces coefficients, on met la somme des fractions partielles sur un dénominateur commun ($Q_m(x)$) et on compare les numérateurs des deux membres de l'expression. On obtient alors un système d'équations linéaires, qui nous donne une solution unique pour les coefficients.

On conclut que la fonction rationnelle propre s'écrit comme une somme de fractions partielles. Par conséquent, pour résoudre le problème de l'intégration d'une telle fonction, il suffit d'intégrer ces fractions partielles.

Exemple 14. Pour intégrer la fonction rationnelle propre

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

on calcule d'abord sa décomposition en fractions partielles. La décomposition du dénominateur prend la forme

$$x^2-4 = (x-2)(x+2),$$

et on peut donc écrire la fonction comme une somme de deux fractions partielles

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}.$$

Pour calculer les valeurs des deux coefficients indéterminés A et B on met l'expression sur un dénominateur commun. On voit alors que

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{x^2-4}.$$

Comparant les coefficients des numérateurs, on conclut que

$$\begin{cases} A + B = 1, \\ 2A - 2B = 1. \end{cases}$$

Ce système d'équations linéaires a une unique solution

$$A = \frac{3}{4}, \qquad B = \frac{1}{4},$$

et on conclut que

$$\frac{x+1}{x^2-4} = \frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2-4} dx &= \int (\frac{3}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)}) dx \\ &= \frac{3}{4} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx \\ &= \frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

Exemple 15. On calcule l'intégrale

$$\int \frac{5x^2+3x+2}{x^3-x^2+x-1} dx.$$

A cet effet, on calcule d'abord la décomposition en fractions partielles de cette fonction. Le dénominateur se décompose en facteurs comme suit:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x^2+1)(x-1).$$

L'expression quadratique dans cette décomposition a un discriminant négatif et ne peut donc pas être décomposée en facteurs linéaires. On voit donc que

$$\frac{5x^2+3x+2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

On met l'expression sur un dénominateur commun. Ceci nous donne

$$\frac{5x^2+3x+2}{x^3-x^2+x-1} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)}{x^3-x^2+x-1},$$

et on conclut que

$$\begin{cases} A + B = 5, \\ -B + C = 3, \\ A - C = 2. \end{cases}$$

La solution de ce système d'équations linéaires est donnée par

$$A = 5, \qquad B = 0, \qquad C = 3,$$

et par conséquent

$$\int \frac{5x^2+3x+2}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \frac{5}{x-1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx = 5\ln|x-1| + 3\,\mathrm{arctg}\,x + C.$$

Exemple 16. Calculons l'intégrale

$$\int \frac{2x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx.$$

La décomposition en facteurs du dénominateur de cette fonction rationnelle propre nous montre que

$$\frac{2x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}.$$

On met tout sur un dénominateur commun pour obtenir

$$\frac{2x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)},$$

ce qui nous donne un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} A+C=2, \\ A+B-2C=1, \\ -2A+2B+C=3. \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$A=1, \qquad B=2, \qquad C=1,$$

et on voit que

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2+x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx &= \int \frac{1}{x-1}dx + 2\int \frac{1}{(x-1)^2}dx + \int \frac{1}{x+2}dx \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln|x+2| + C. \end{aligned}$$

3. Intégration des fractions partielles

On a montré en haut que chaque fonction rationnelle propre s'écrit comme une somme de fractions partielles. Par conséquent, l'intégration d'une fonction rationnelle (propre) se réduit à l'intégration des différents types de fractions partielles. On verra maintenant comment on peut calculer les intégrales de toutes ces fractions partielles.

La première famille de fractions partielles est de la forme

$$\frac{A}{ax+b}.$$

Pour calculer l'intégrale de ces fonctions, il suffit d'utiliser une substitution de la forme

$$t = ax+b, \qquad x = \frac{t-b}{a}, \qquad dx = \frac{1}{a}dt.$$

Exemple 17. On calcule

$$\int \frac{5}{3x+7}dx.$$

La substitution

$$t = 3x+7, \qquad x = \frac{t-7}{3}, \qquad dx = \frac{1}{3}dt,$$

nous montre alors que

$$\begin{aligned} \int \frac{5}{3x+7}dx &= \frac{5}{3}\int \frac{1}{t}dt \\ &= \frac{5}{3}\ln|t| + C \\ &= \frac{5}{3}\ln|3x+7| + C. \end{aligned}$$

Un deuxième type de fractions partielles est de la forme

$$\frac{A}{(ax+b)^n}, \qquad n \neq 1.$$

Comme dans le cas précédent, les intégrales de ces fonctions peuvent être calculées en utilisant une substitution de la forme $t = ax+b$.

Exemple 18. On calcule l'intégrale

$$\int \frac{5}{(3x+7)^6}dx.$$

A cet effet, on définit

$$t = 3x+7,$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}\int \frac{5}{(3x+7)^6}dx &= \frac{5}{3}\int \frac{1}{t^6}dt \\ &= \frac{5}{3}\left(\frac{1}{-5t^5}\right) + C \\ &= -\frac{1}{3t^5} + C \\ &= -\frac{1}{3(3x+7)^5} + C.\end{aligned}$$

La troisième famille de fractions partielles s'écrit comme

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}.$$

Pour calculer les intégrales de ces fonctions, on décompose d'abord le numérateur de ces fonctions en une somme d'un multiple de la dérivée du dénominateur et un nombre réel, c'est-à-dire

$$Ax+B = \alpha(2ax+b)+\beta.$$

La première composante de cette somme nous donne

$$\int \frac{\alpha(2ax+b)}{ax^2+bx+c}dx = \alpha \ln|ax^2+bx+c| + C.$$

En séparant une constante spécifique, le deuxième terme prend la forme

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx.$$

En séparant, si nécessaire, une autre constante, cette fonction peut être réduite à la forme

$$1 + (\frac{x+\lambda}{\mu})^2.$$

Une substitution

$$t = \frac{x+\lambda}{\mu}$$

nous permet alors de calculer cette intégrale.

Exemple 19. On calcule l'intégrale

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+5}dx.$$

Tout d'abord, on écrit

$$4x+5 = 2(2x+2)+1,$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+5}{x^2+2x+5}dx &= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx \\ &= 2\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{1}{x^2+2x+5}dx.\end{aligned}$$

Le dénominateur de la deuxième composante de cette intégrale s'écrit

$$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4 = 4(1 + \frac{1}{4}(x+1)^2) = 4\left(1 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right).$$

On peut alors réduire cette intégrale à la forme

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+(\frac{x+1}{2})^2}dx.$$

On substitue maintenant

$$t = \frac{x+1}{2}, \qquad x = 2t-1, \qquad dx = 2dt,$$

pour obtenir

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{1+t^2}2dt = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

L'intégrale complète est donc de la forme

$$\int \frac{4x+5}{x^2+2x+5}dx = 2\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C.$$

Le dernier type de fractions partielles est de la forme

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n}, \qquad n \neq 1.$$

De nouveau, on écrit le numérateur comme une somme

$$Ax + B = \alpha(2ax+b) + \beta,$$

ce qui nous permet de décomposer cette intégrale en deux parties. La première partie prend la forme

$$\int \frac{\alpha(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^n}dx = \alpha\frac{1}{(-n+1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + C.$$

Pour calculer l'intégrale de la deuxième composante, on continue de la même façon que dans le cas précédent. Après une substitution, et après avoir séparé les constantes nécessaires, l'intégrale s'écrit comme

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^n}dt.$$

Ces intégrales peuvent être calculées en utilisant une substitution trigonométrique. Ces substitutions seront étudiées dans la suite de ce chapitre.

Exemple 20. Calculons l'intégrale

$$\int \frac{4x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx.$$

Pour commencer, on écrit le numérateur de cette fonction comme

$$4x+5 = 2(2x+2)+1.$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{4x+5}{(x^2+2x+5)^2}dx &= 2\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx + \int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}dx \\ &= -\frac{2}{x^2+2x+5} + \int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}dx.\end{aligned}$$

Pour calculer la deuxième partie de cette intégrale, on remarque que

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = 4(1+\frac{1}{4}(x+1)^2) = 4\left(1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2\right).$$

L'intégrale s'écrit donc comme

$$\int \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\left(1+(\frac{x+1}{2})^2\right)^2}dx.$$

On substitue maintenant

$$t = \frac{x+1}{2}, \qquad x = 2t-1, \qquad dx = 2dt,$$

et on obtient

$$\frac{1}{16}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}2dt = \frac{1}{8}\int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$$

Pour calculer cette intégrale, on utilise une substitution trigonométrique $t = \operatorname{tg} u$, qui sera introduite plus tard dans ce chapitre.

6. Fonctions trigonométriques

Pour l'intégration des fonctions trigonométriques il existe un nombre de techniques spécifiques. Dans ce paragraphe, on en étudie quelques unes.

Une première technique utilise des relations connues (*formules trigonométriques*) entre les fonctions trigonométriques (comme, par exemple, les formules de doublement et les formules de Simpson) pour réduire la fonction donnée à une fonction dont on peut calculer l'intégrale par des autres méthodes. Les formules les plus souvent utilisées dans ce cadre sont les suivantes:

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha &= \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha),\\
\cos^2\alpha &= \frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha),\\
1+\operatorname{tg}^2\alpha &= \frac{1}{\cos^2\alpha},\\
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),\\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)),\\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).
\end{aligned}$$

Exemple 21. On peut appliquer ces formules pour démontrer que

$$\begin{aligned}
\int \sin^2 x dx &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx\\
&= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx\\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.
\end{aligned}$$

Exemple 22. On voit aussi que

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x\cos 3x dx &= \frac{1}{2}\int \sin 5x + \sin(-x)dx\\
&= -\frac{1}{10}\cos 5x + \frac{1}{2}\cos x + C.
\end{aligned}$$

Une deuxième classe de fonctions trigonométriques contient les fonctions de la forme

$$\int \sin^n x\cos^m x dx,$$

où au moins un des exposants m et n est un nombre impair. Supposons que m est impair. Alors $m-1$ est un nombre pair, et on peut écrire l'intégrale dans la forme

$$\int \sin^n x\cos^{m-1} x\cos x dx = \int \sin^n x(1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}}\cos x dx.$$

Une substitution
$$t = \sin x, \qquad dt = \cos x dx,$$
réduit l'intégrale à une intégrale d'une fonction polynomiale.

Cette même technique peut être appliquée pour l'intégration d'une fonction trigonométrique de la forme
$$\int R(\sin x)\cos x dx, \qquad \int R(\cos x)\sin x dx,$$
où R est une fonction rationnelle.

Exemple 23. Pour calculer l'intégrale
$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\cos x dx$$
on utilise une substitution
$$t = \sin x, \qquad dt = \cos x dx.$$
On obtient alors
$$\begin{aligned}\int t^2(1-t^2)dt &= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C\\ &= \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C.\end{aligned}$$

Exemple 24. Calculons l'intégrale
$$\int \frac{1}{\cos x} dx.$$
En multipliant par la fonction $\cos x$ au numérateur et au dénominateur, on voit que
$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} dx.$$
La substitution
$$t = \sin x, \qquad dt = \cos x dx,$$
nous montre alors que
$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{1-t^2} dt,$$
et l'intégrale de cette fonction rationnelle nous donne
$$\frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{2}\ln|1-t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C.$$

Une dernière technique qu'on peut utiliser pour l'intégration d'une fonction trigonométrique utilise une substitution
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \qquad x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$
On peut facilement vérifier que, dans ce cas,
$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}.$$
Une telle substitution réduit la fonction trigonométrique à une fonction rationnelle, qui peut toujours être intégrée avec la technique des fractions partielles introduite au paragraphe précédent. Cette méthode nous permet donc de calculer l'intégrale de *toute* fonction trigonométrique, mais nous remarquons que, pour certaines intégrales, le calcul peut être très compliqué.

Exemple 25. Calculons l'intégrale

$$\int \frac{1}{\sin x} dx.$$

La substitution $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ nous montre que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin x} dx &= \int \frac{1+t^2}{2t} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \int \frac{1}{t} dt \\
&= \ln |t| + C \\
&= \ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C.
\end{aligned}$$

Exemple 26. De la même manière, on voit que

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sin^2 x} dx &= \int \frac{(1+t^2)^2}{4t^2} \frac{2}{1+t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^2} dt \\
&= \frac{1}{2} \int dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2} dt \\
&= \frac{t}{2} - \frac{1}{2t} + C \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{cotg} \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

7. Substitutions trigonométriques

On a déjà remarqué que les fonctions trigonométriques $\sin x$, $\cos x$ et $\operatorname{tg} x$ satisfont un nombre d'identités très importantes:

$$\begin{aligned}
1 - \sin^2 x &= \cos^2 x, \\
1 + \operatorname{tg}^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
\frac{1}{\cos^2 x} - 1 &= \operatorname{tg}^2 x.
\end{aligned}$$

Supposons donné une fonction (irrationnelle) qui contient un facteur de la forme

$$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}.$$

En utilisant une substitution

$$x = \frac{a}{b} \sin t, \qquad dx = \frac{a}{b} \cos t dt,$$

cette composante prend la forme

$$\sqrt{a^2 - b^2 \frac{a^2}{b^2} \sin^2 t} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t.$$

On peut, par conséquent, éliminer la racine carrée de cette fonction en utilisant une telle substitution. En général, on obtiendra donc une fonction plus simple dont on peut calculer l'intégrale en utilisant des autres méthodes.

Afin de calculer comment t s'écrit en fonction de x on remarque que

$$\sin t = \frac{bx}{a}.$$

Considérons t comme un des angles d'un triangle rectangulaire. Alors bx et a sont les longueurs de deux faces du triangle. La longueur de la troisième face est alors donnée par $\sqrt{a^2 - b^2x^2}$, et on peut maintenant calculer toutes les fonctions trigonométriques.

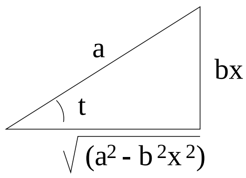

Figure 42. *Substitution inverse.*

Exemple 27. Afin de calculer l'intégrale

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx$$

on introduit une substitution

$$x = 2\sin t, \qquad dx = 2\cos t dt.$$

On obtient alors

$$\int 4\cos^2 t dt = \sin 2t + 2t + C = 2\sin t \cos t + 2t + C.$$

La Figure 43 nous montre que

$$\cos t = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2},$$

et l'intégrale est donnée par

$$\int \sqrt{4 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} + 2 \arcsin \frac{x}{2} + C.$$

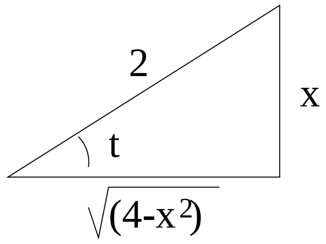

Figure 43. *Calcul de la substitution inverse.*

Pour les fonctions qui contiennent un facteur de la forme

$$\sqrt{a^2 + b^2x^2},$$

on utilise une substitution de la forme

$$x = \frac{a}{b}\operatorname{tg} t, \qquad dx = \frac{a}{b}\frac{1}{\cos^2 t}dt.$$

Cette substitution nous donne

$$\sqrt{a^2 + b^2\frac{a^2}{b^2}\operatorname{tg}^2 x} = \sqrt{a^2 + a^2\operatorname{tg}^2 t} = a\frac{1}{\cos t},$$

et on a donc de nouveau éliminé la racine carrée.

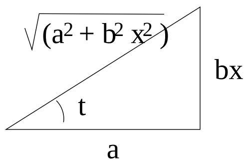

Figure 44. *Calcul de l'inverse de la substitution.*

Exemple 28. Afin de calculer

$$\int (4 + x^2)^{-\frac{3}{2}}dx$$

on utilise la substitution

$$x = 2\operatorname{tg} t, \qquad dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{4}{\cos^2 t}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{2}{\cos^2 t}dt &= \frac{1}{4}\int \cos t dt \\ &= \frac{1}{4}\sin t + C \\ &= \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + C.\end{aligned}$$

Comme on a déjà remarqué avant, la substitution trigonométrique

$$x = \operatorname{tg} t, \qquad dx = \frac{1}{\cos^2 t}dt,$$

peut aussi être appliquée pour l'intégration des fractions partielles de la forme

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

Finalement, les fonctions qui contiennent un facteur

$$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$$

peuvent souvent être intégrées en utilisant une substitution

$$x = \frac{a}{b\cos t}, \qquad dx = \frac{a}{b}\frac{\sin t}{\cos^2 t}dt.$$

Cette composante est alors remplacée par

$$\sqrt{b^2 \frac{a^2}{b^2\cos^2 t} - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t} - a^2} = a \operatorname{tg} x,$$

éliminant de nouveau la racine carrée.

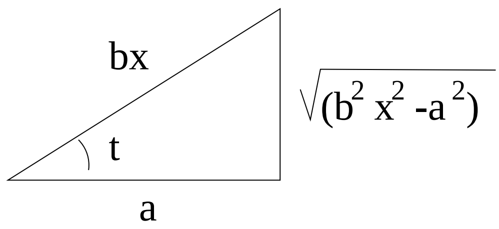

Figure 45. *Substitution inverse.*

Exemple 29. Calculons l'intégrale

$$\int (x^2 - 4)^{-\frac{3}{2}} dx.$$

A cet effet, on choisit la substitution

$$x = \frac{2}{\cos t}, \qquad dx = \frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt,$$

qui nous montre que

$$\begin{aligned} \int (4\operatorname{tg}^2 t)^{-\frac{3}{2}} \frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt &= \frac{1}{4}\int \frac{\cos t}{\sin^2 t}dt \\ &= -\frac{1}{4\sin t} + C. \end{aligned}$$

Il suit de la Figure 45 que

$$\sin t = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$$

et l'intégrale est donc donnée par

$$-\frac{x}{4\sqrt{x^2-4}} + C.$$

8. Intégration des fonctions irrationnelles

Une autre classe de fonctions pour laquelle on connaît des techniques d'intégration spéciales sont les fonctions qui contiennent une composante de la forme

$$\sqrt[n]{ax+b}.$$

Dans ce cas, une substitution

$$z^n = ax + b, \qquad x = \frac{z^n - b}{a}, \qquad dx = \frac{nz^{n-1}}{a} dz,$$

réduit le problème à l'intégration d'une fonction rationnelle.

Exemple 30. Afin de calculer l'intégrale

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$$

on choisit la substitution

$$z^2 = x - 1, \qquad x = z^2 + 1, \qquad dx = 2z dz.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int \frac{2z}{(z^2+1)\sqrt{z^2}} dz &= 2\int \frac{1}{1+z^2} dz \\ &= 2 \operatorname{arctg} z + C \\ &= 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + C. \end{aligned}$$

On peut aussi intégrer les fonctions irrationnelles qui contiennent une composante de la forme

$$\sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

A cet effet, on réduit l'expression à une des formes suivantes:

$$\sqrt{1+z^2}, \qquad \sqrt{1-z^2}, \qquad \sqrt{z^2}, \qquad \sqrt{z^2-1}.$$

Dans chacun de ces cas, la racine peut être éliminée en utilisant une substitution trigonométrique.

Exemple 31. On remarque que

$$\begin{aligned} 5 - 4x - x^2 &= 5 - (x^2 + 4x) \\ &= 5 - (x+2)^2 + 4 \\ &= 9 - (x+2)^2 \\ &= 9\left(1 - \left(\frac{x+2}{3}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, on voit que

$$\int \sqrt{5-4x-x^2}dx = \int 3\sqrt{1-\left(\frac{x+2}{3}\right)^2}dx.$$

Une substitution

$$z = \frac{x+2}{3}, \qquad x = 3z-2, \qquad dx = 3dz,$$

nous donne alors

$$\int 9\sqrt{1-z^2}dz,$$

et, finalement, une substitution

$$z = \sin u, \qquad dz = \cos u du$$

nous permet de calculer cette intégrale.

Chapitre 11

Intégrale définie

1. Définition et théorèmes fondamentaux

Considérons une fonction $f(x)$, qui est continue par parties sur un intervalle $[a, b]$. On peut alors diviser cet intervalle en n pièces. A cet effet, on choisit $n - 1$ points à l'intérieur de l'intervalle,

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_{n-1} < \xi_n = b.$$

La longueur de chaque intervalle sera dénotée par

$$\Delta_i = \xi_i - \xi_{i-1}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ensuite, choisissons dans chaque sous-intervalle un point arbitraire qu'on dénote par

$$x_i \in [\xi_{i-1}, \xi_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

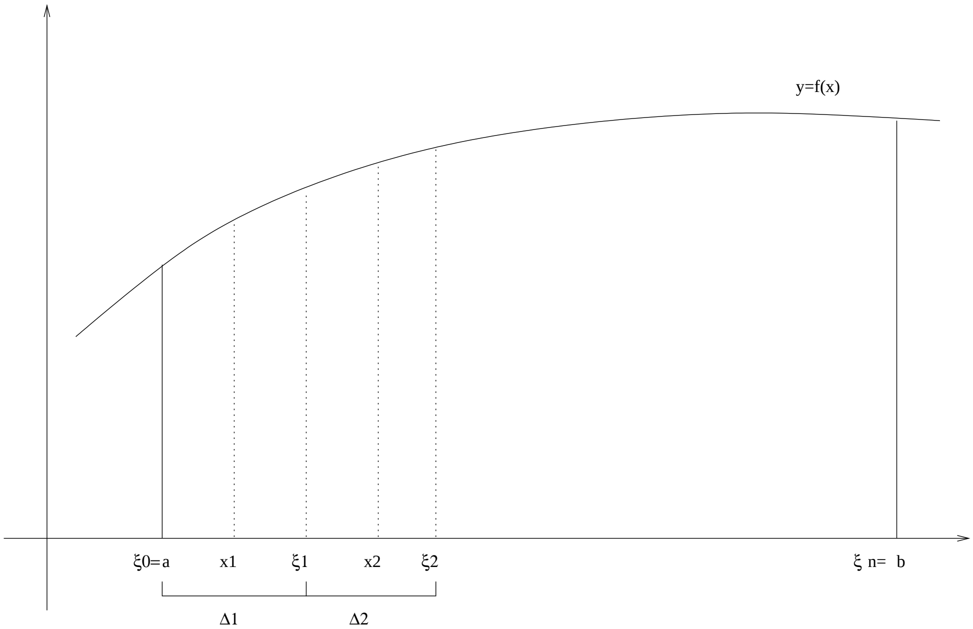

Figure 46. *Intégrale définie d'une fonction réelle.*

On peut alors introduire la somme

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i = f(x_1)\Delta_1 + f(x_2)\Delta_2 + \ldots + f(x_n)\Delta_n.$$

Supposons maintenant qu'on fait croître indéfiniment le nombre de sous-intervalles n (on considère donc la limite pour $n \to +\infty$), en s'assurant que la longueur de chaque sous-intervalle tend vers 0. Alors on démontre que la limite de la somme S_n existe et qu'elle ne dépend ni du choix des sous-intervalles, ni du choix du point x_i à l'intérieur de chaque intervalle. Cette limite est appelée l'*intégrale définie* de la fonction $y = f(x)$ entre les valeurs $x = a$ et $x = b$, et on dénote cette intégrale par

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} S_n.$$

Exemple 1. Considérons la fonction $y = x$ et les valeurs extrêmes $a = 0$ et $b = 4$. Divisons l'intervalle $[0, 4]$ en n sous-intervalles de la même longueur

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \ldots = \Delta_n = \frac{4}{n}.$$

Les bornes de chaque sous-intervalles sont données par

$$\xi_0 = 0, \quad \xi_1 = \frac{4}{n}, \quad \xi_2 = 2\frac{4}{n}, \quad \ldots, \quad \xi_i = i\frac{4}{n}, \quad \ldots, \quad \xi_n = n\frac{4}{n} = 4.$$

Dans chaque sous-intervalle, on choisit ensuite le point

$$x_i = \xi_i = \frac{4i}{n}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Il est alors facile à vérifier que

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4i}{n}\frac{4}{n} \\ &= \frac{16}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\ &= \frac{16}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{8(n^2+n)}{n^2}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_0^4 x dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{8(n^2+n)}{n^2} = 8.$$

La définition implique déjà quelques propriétés très importantes des intégrales définies. Par exemple, on vérifie facilement que

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Il est aussi évident que

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx,$$

et on dit que

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Finalement, on peut vérifier que

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

Le *théorème fondamental du calcul intégral* propose une relation entre l'intégrale indéfinie et l'intégrale définie d'une fonction, et il nous permet de calculer l'intégrale définie d'une fonction à l'aide d'une fonction primitive quelconque de la fonction donnée. En effet, le théorème dit que

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a),$$

où $F(x)$ est une fonction primitive (arbitraire) de $f(x)$, c'est-à-dire que

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Exemple 2. La fonction $f(x) = x$ a pour fonction primitive

$$F(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C.$$

Par conséquent,

$$\int_0^4 x dx = (\frac{x^2}{2} + C)\Big|_0^4 = (\frac{16}{2} + C) - (\frac{0}{2} + C) = 8.$$

2. Aire d'une surface plane

Supposons que $y = f(x)$ est une fonction qui est continue par parties et qui est définie partout dans l'intervalle $[a, b]$. Supposons en plus que la fonction est positive partout dans cet intervalle. On peut alors calculer l'aire S de la figure plane entre le graphique de la fonction, l'axe x et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. A cet effet, on divise l'intervalle $[a, b]$ en n pièces, en choisissant $n - 1$ points

$$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n = b.$$

Dans chaque sous-intervalle on choisit ensuite un point arbitraire $x_i \in [\xi_{i-1}, \xi_i]$. L'aire de la figure plane peut alors être calculée approximativement comme la somme des aires des rectangles de base $\Delta_i = \xi_i - \xi_{i-1}$ et de hauteur $f(x_i)$, c'est-à-dire par

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta_i.$$

En choisissant un nombre de rectangles n de plus en plus grand, cette approximation sera de plus en plus précise. Par définition, la limite de la somme, pour n qui tend vers l'infini, est donnée par l'intégrale définie de la fonction $f(x)$ entre a et b. Il est alors évident que

$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

Exemple 3. Calculons l'aire d'un triangle rectangulaire de base B et de hauteur H. Cette figure est bornée par l'axe x, la droite $y = \frac{H}{B}x$ et la droite verticale $x = B$. Par conséquent, l'aire de cette surface est donnée par

$$S = \int_0^B \frac{H}{B} x dx = \frac{H}{B} \frac{x^2}{2}\Big|_0^B = \frac{HB}{2}.$$

Exemple 4. La figure plane bornée par la courbe $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ et l'axe x (avec les droites verticales $x = \pm R$) est un demi-cercle. L'aire de cette région est donnée par

$$S = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2} dx = (\frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x}{R} + \frac{1}{2} x\sqrt{R^2 - x^2})\Big|_{-R}^{+R} = \frac{\pi R^2}{2}.$$

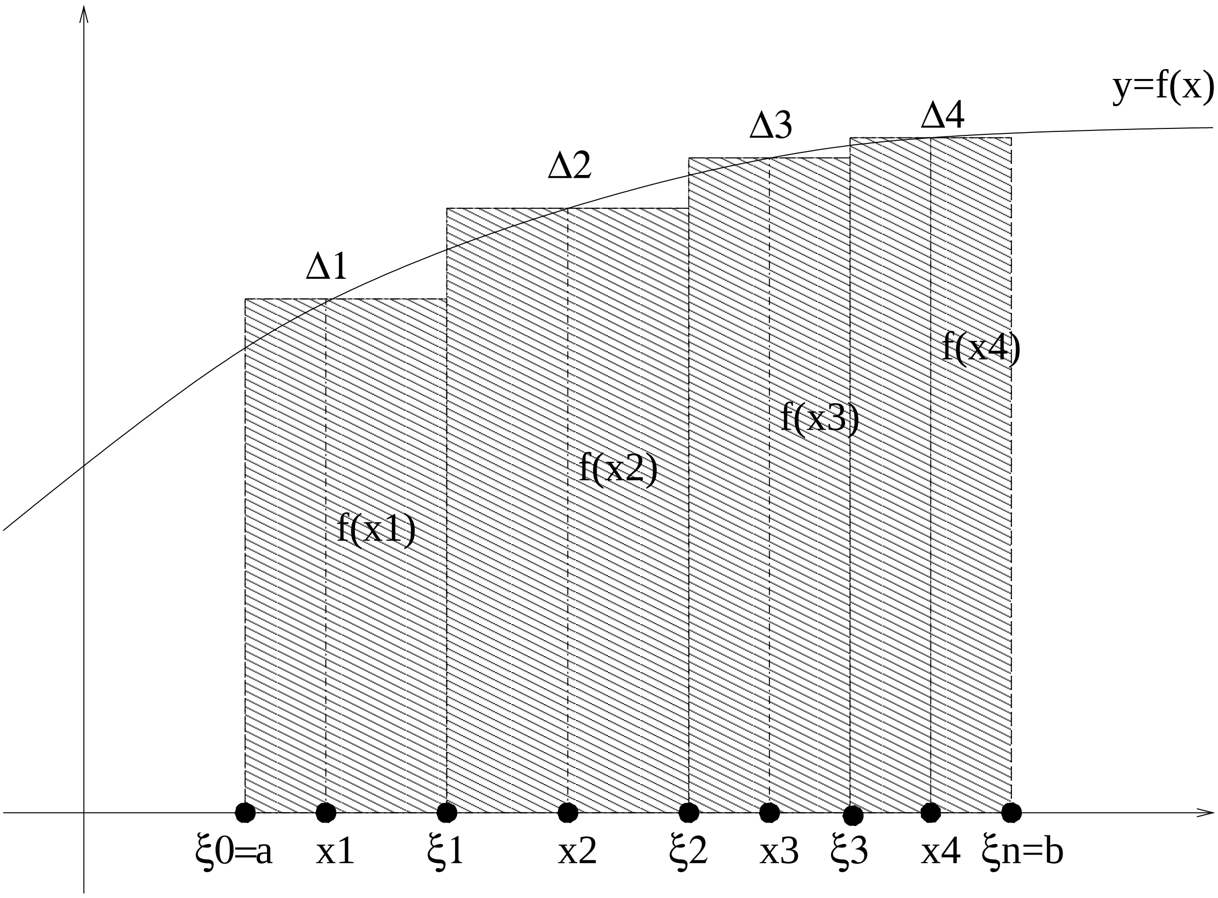

Figure 47. *Aire d'une surface plane.*

La formule qui donne l'aire d'un cercle de rayon R prend donc la forme connue

$$S = \pi R^2.$$

Dans le cas où la surface est bornée du côté inférieur ainsi que du côté supérieur par le graphique d'une fonction, l'aire de la surface est calculée approximativement comme une somme d'aires de rectangles de base Δ_i et de hauteur $f(x_i) - g(x_i)$,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i (f(x_i) - g(x_i)),$$

et on conclut que

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

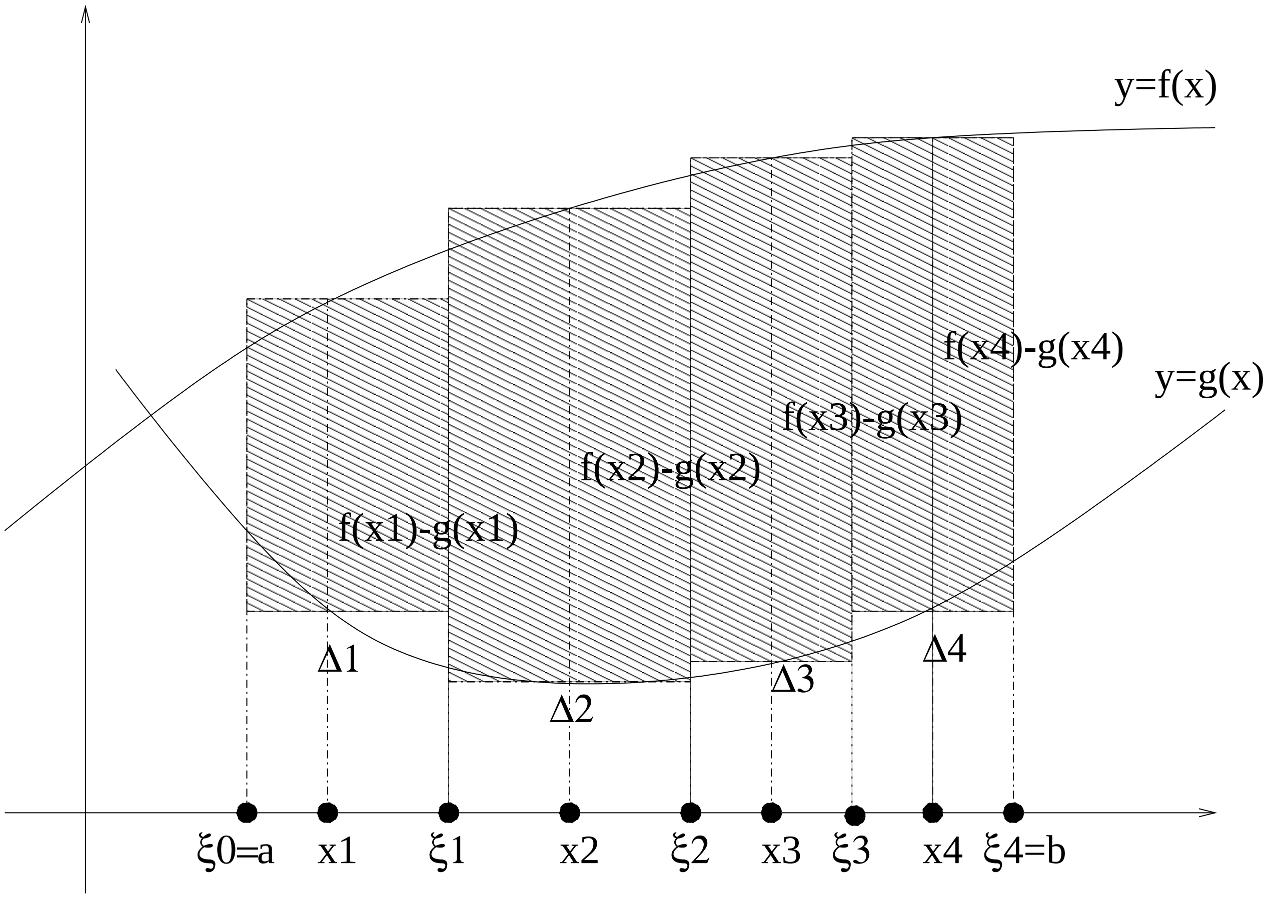

Figure 48. *Aire de la région entre deux courbes.*

Exemple 5. L'aire de la surface entre les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ est donnée par

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{1}{3}.$$

Dans les calculs précédents l'aire de la surface est d'abord calculée approximativement comme la somme des aires des rectangles qui sont associés à une division de l'intervalle. En choisissant une division de plus en plus fine, on obtient une approximation de plus en plus précise de l'aire de la surface. Dans la limite, cette opération nous donne une intégrale définie. Cette technique générale sera utilisée plus tard pour le calcul de quelques autres caractéristiques d'une figure, comme des volumes, des longueurs en des moments. Pour éviter de devoir décrire toute la construction, on utilise souvent des *rectangles élémentaires*. Ceux-ci sont des rectangles qui ont une largeur "infiniment petite" dx, c'est-à-dire qu'on considère immédiatement une division infiniment fine de l'intervalle.

Le calcul de l'aire d'une surface plane est alors exécuté de la façon suivante. Dans chaque point x entre a et b on construit un *rectangle élémentaire* de hauteur $f(x)$ et de base dx. L'aire de ce rectangle est donnée par la formule

$$dS = f(x)dx,$$

et la somme pour toutes les valeurs possibles de x est alors calculée comme une intégrale

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

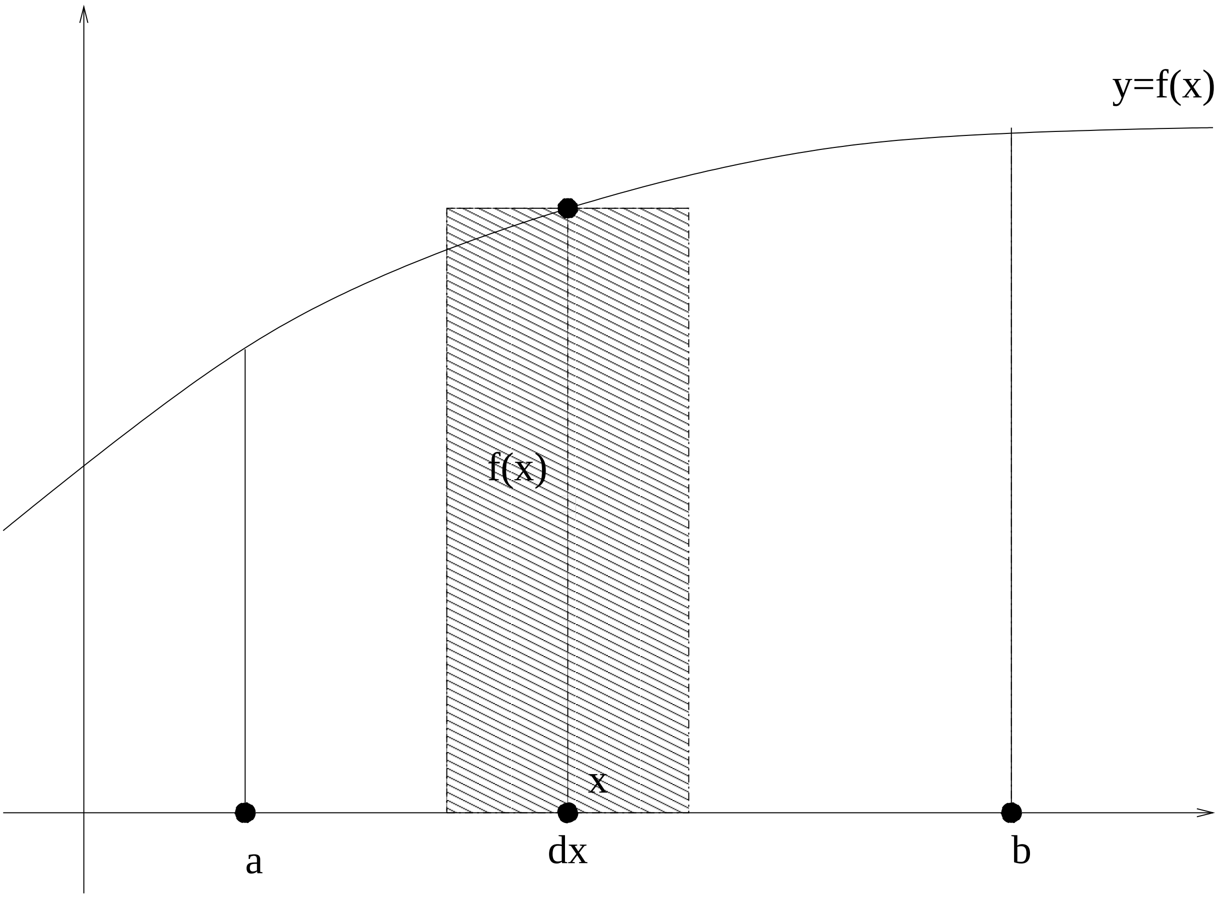

Figure 49. *Aire d'une surface et rectangles élémentaires.*

3. Volume d'un corps de révolution

On appelle *corps de révolution* une figure dans l'espace tridimensionnel engendrée par une rotation d'une surface plane autour d'un axe de rotation situé dans le plan.

Considérons maintenant une courbe, donnée par la fonction $y = f(x)$. La rotation autour de l'axe x de la région bornée par l'axe x et la courbe (et les droites verticales $x = a$ et $x = b$) engendre alors un corps de révolution. Pour calculer le volume de ce corps, on divise d'abord la surface plane bornée par la courbe $y = f(x)$ et l'axe x en une série de rectangles. Chacun de ces rectangles engendre, lors de la rotation autour de l'axe x,un cylindre. Le rayon de ce cylindre est donné par $f(x_i)$ et son hauteur est Δ_i. On peut donc calculer approximativement le volume du corps de révolution comme la somme des volumes de ces cylindres,

$$\sum_{i=1}^{n} \pi f(x_i)^2 \Delta_i.$$

En faisant tendre le nombre de rectangles vers l'infini, on voit que le volume du corps de révolution est donné par

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

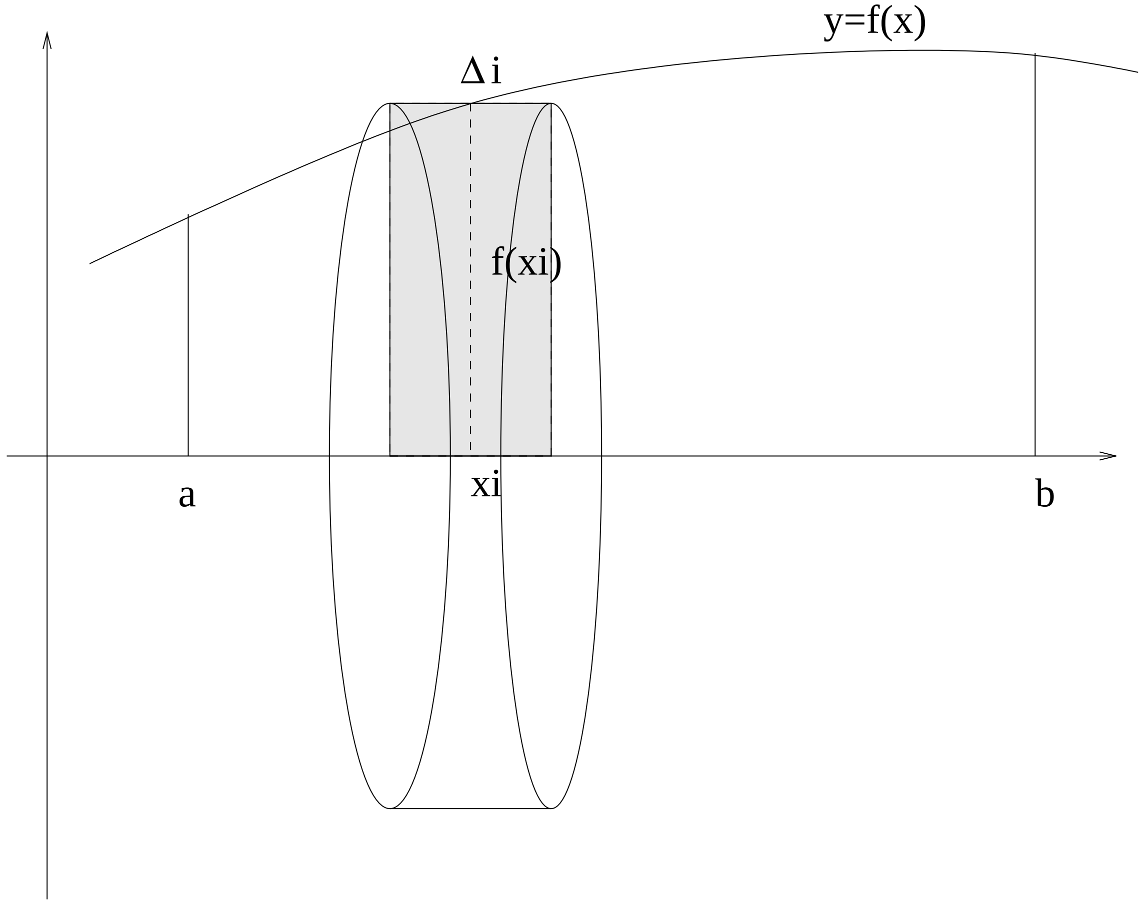

Figure 50. *Volume d'un corps de révolution.*

Comme avant, on peut simplifier le calcul du volume comme suit. Pour chaque point x entre a et b on considère un rectangle élémentaire de largeur dx et de hauteur $f(x)$. La rotation engendre alors un cylindre de volume

$$dV = \pi f(x)^2 dx,$$

et le volume du corps de révolution est donc donné par

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Exemple 6. La rotation autour de l'axe x d'un triangle rectangulaire, formé par la droite $y = \frac{R}{H}x$, l'axe x et la droite verticale $x = H$ engendre un cône de hauteur H et de rayon R. Le volume de ce corps de révolution est donné par

$$V = \int_0^H \pi \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2}\frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

Exemple 7. Une boule de rayon R est un corps de révolution, engendré par la rotation autour de l'axe x du demi-cercle donné par l'équation $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Le volume de la boule est donc donné par

$$V = \pi \int_{-R}^{+R} (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2) dx = \pi \left.(R^2 x - \frac{x^3}{3})\right|_{-R}^{+R} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Considérons maintenant une surface bornée du côté inférieur et du côté supérieur par les deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$. La Figure 51 nous montre immédiatement que le rectangle élémentaire au point x engendre, lors d'une rotation autour de l'axe x, une couronne dont le volume est donné par

$$dV = \pi(f(x)^2 - g(x)^2)dx.$$

Le volume total du corps de révolution est, par conséquent, donné par

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2)dx.$$

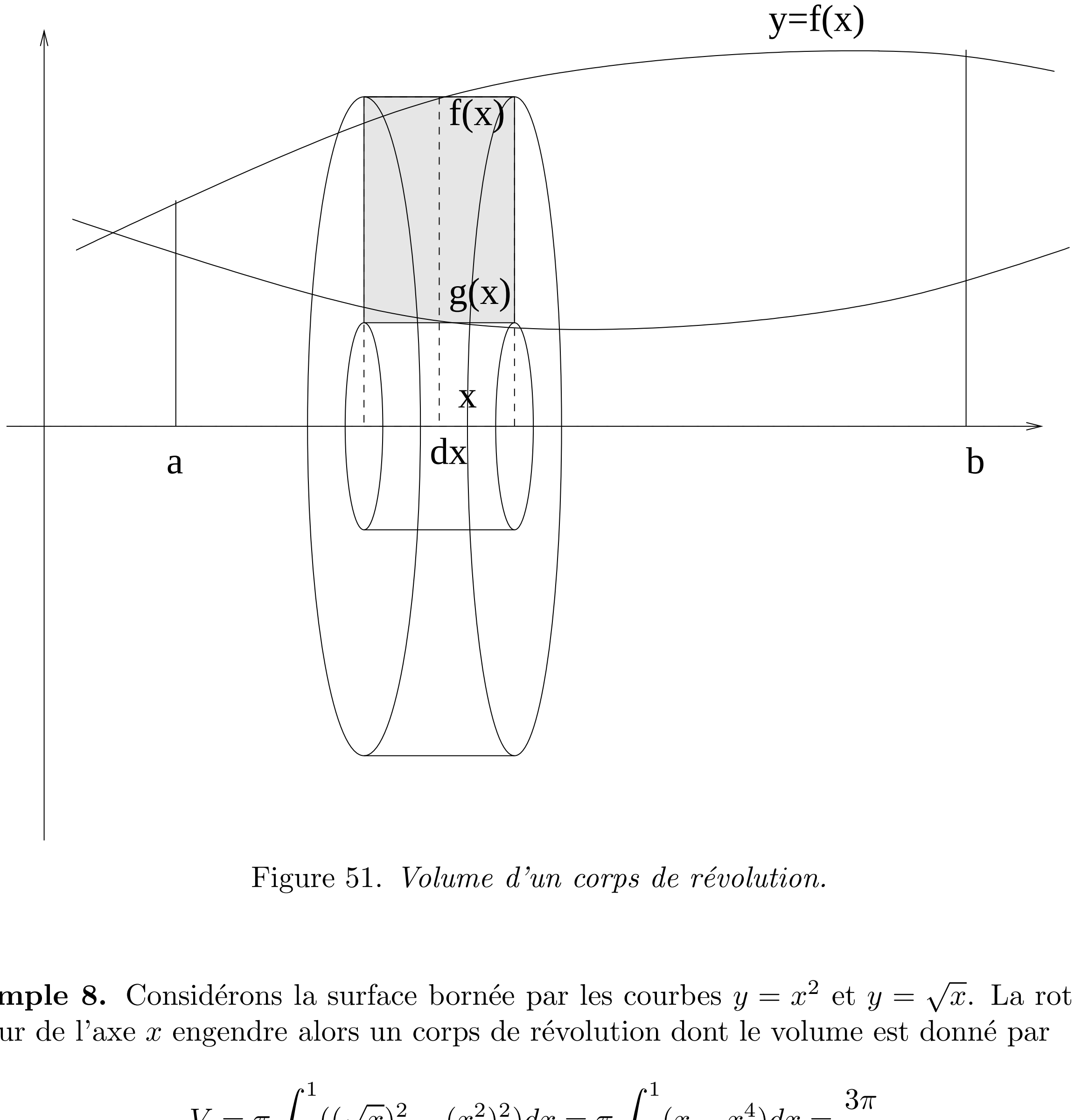

Figure 51. *Volume d'un corps de révolution.*

Exemple 8. Considérons la surface bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$. La rotation autour de l'axe x engendre alors un corps de révolution dont le volume est donné par

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{x})^2 - (x^2)^2)dx = \pi \int_0^1 (x - x^4)dx = \frac{3\pi}{10}.$$

Dans les calculs précédents on a divisé la surface plane en une collection de rectangles élémentaires qui sont perpendiculaires à l'axe de rotation. Pour faciliter certains calculs, on peut aussi diviser la surface en rectangles élémentaires qui sont parallèles à l'axe de rotation. Considérons la surface bornée par les deux courbes $y = f(x)$ et $y = g(x)$. On divise alors la région entre $x = a$ et $x = b$ en une série de rectangles élémentaires perpendiculaires à l'axe x. En exécutant une rotation autour de l'axe y, ces rectangles engendrent des tubes de rayon x, épaisseur dx et longueur $f(x) - g(x)$. Le volume du tube est donné par

$$dV = 2\pi x(f(x) - g(x))dx,$$

et le volume du corps de révolution s'écrit donc comme

$$V = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x))dx.$$

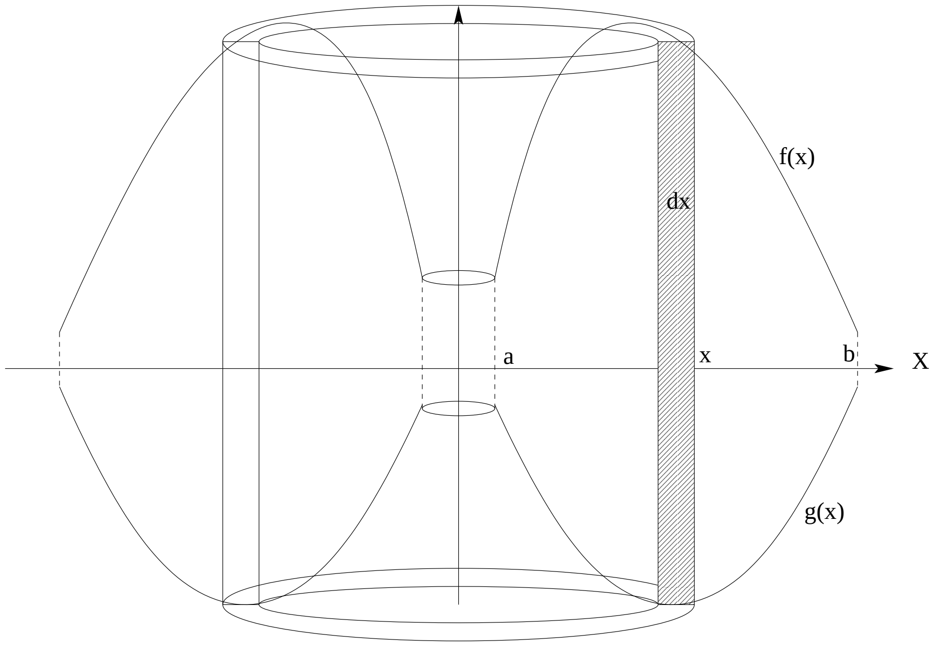

Figure 52. *Volume d'un corps de révolution.*

Exemple 9. Considérons la surface plane, bornée par les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ et exécutons une rotation autour de l'axe y. On obtient alors un corps de révolution dont le volume est donné par

$$\int_0^1 2\pi x(\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{3\pi}{10}.$$

4. Longueur d'une courbe

Considérons maintenant une courbe plane, définie par la fonction $y = f(x)$ entre les points $x = a$ et $x = b$. Afin de calculer la longueur L de cette courbe on divise de nouveau l'intervalle $[a, b]$ en n pièces, et on calcule une valeur approximative de la longueur de la courbe en remplaçant, dans chaque sous-intervalle, la courbe par sa tangente en un des points. La longueur d'une telle ligne tangente est donnée par

$$\sqrt{\Delta_i^2 + f'(x_i)^2\Delta_i^2} = \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\Delta_i,$$

et la longueur totale de toutes ces lignes est donc

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i)^2}\Delta_i.$$

En prenant de nouveau la limite pour $n \to +\infty$ on voit que la longueur de la courbe est donnée par

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

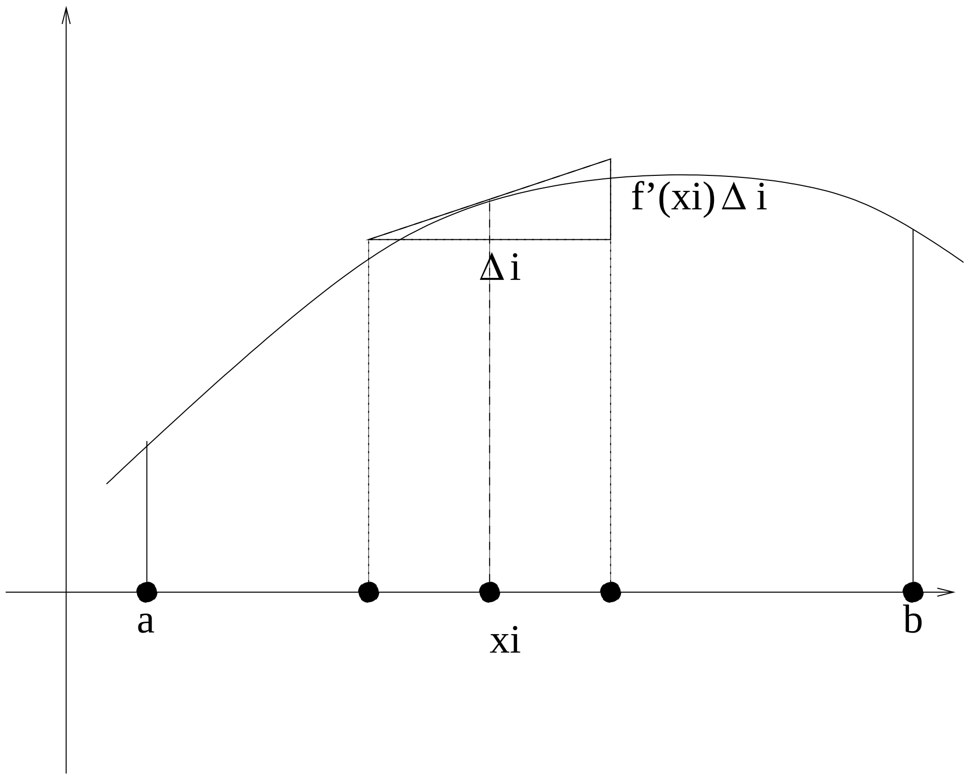

Figure 53. *Longueur d'une courbe plane.*

Exemple 10. La circonférence d'un demi-cercle de rayon R est donnée par la longueur de la courbe $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ entre $x = -R$ et $x = R$, c'est-à-dire,

$$L = \int_{-R}^{+R} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}dx = \int_{-R}^{+R} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{R})^2}}dx = R \arcsin \frac{x}{R}\Big|_{-R}^{+R} = \pi R.$$

On obtient donc la formule connue pour la circonférence d'un cercle, $L = 2\pi R$.

5. Oppervlakte van een omwentelingslichaam

6. Centre de gravité d'une figure plane

Le *moment* d'un point de masse m par rapport à un axe donné est défini comme le produit de la masse du point par la distance entre le point et l'axe. Le *centre de gravité* d'une figure plane est défini comme le point $(\bar{x}, \bar{y})$ tel que, si on concentre toute la masse de la figure dans ce point, le moment par rapport à un axe quelconque reste le même. On sait que le centre de gravité d'un rectangle coïncide avec le centre (géométrique) du rectangle.

Maintenant, supposons donnée une figure plane bornée par l'axe x, les droites verticales $x = a$ et $x = b$ et la courbe $y = f(x)$. La masse totale M de cet objet correspond à l'aire total de la surface, c'est-à-dire que

$$M = S = \int_a^b f(x)dx.$$

Si on dénote par $(\bar{x}, \bar{y})$ les coordonnées du centre de gravité, les moments de ce point par rapport aux axes x et y sont donnés par

$$M_x = M\bar{y}, \qquad M_y = M\bar{x}.$$

Pour calculer le moment de la surface plane par rapport aux axes, on divise de nouveau la figure en rectangle élémentaires de base dx et de hauteur $f(x)$. Le moment d'un tel rectangle par rapport à l'axe x est donné par

$$dM_x = \frac{f(x)}{2} f(x)dx = \frac{f(x)^2}{2} dx,$$

et son moment par rapport à l'axe y prend la forme

$$dM_y = xf(x)dx.$$

Par conséquent, les moments totaux de la figure sont donnés par

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b f(x)^2 dx, \qquad M_y = \int_a^b xf(x)dx.$$

Les coordonnées du centre de gravité peuvent maintenant être calculées comme suit:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M}.$$

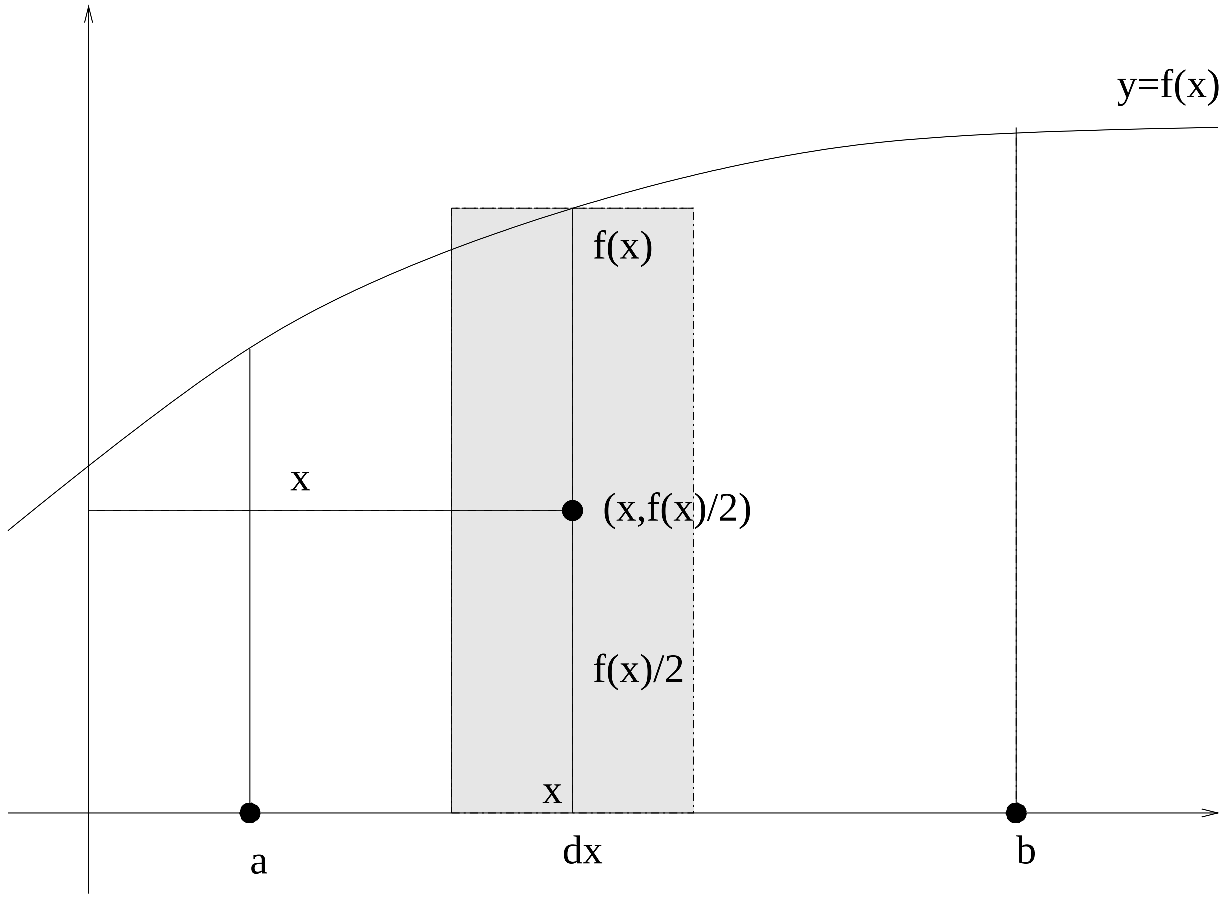

Figure 54. *Moment d'un rectangle élémentaire.*

Exemple 11. Considérons d'abord un triangle rectangulaire, borné par la droite $y = \frac{H}{B}x$, l'axe x et la droite verticale $x = B$. On a déjà calculé l'aire (et donc la masse totale) d'un tel triangle, qui est donnée par

$$M = \frac{1}{2}HB.$$

Le moment du triangle par rapport à l'axe x est donné par

$$M_x = \int_0^B \frac{H}{B}\frac{x}{2}\frac{H}{B}xdx = \frac{H^2}{2B^2}\int_0^B x^2dx = \frac{1}{6}H^2B.$$

Le moment du triangle par rapport à l'axe y est égal à

$$M_y = \int_0^B x\frac{H}{B}xdx = \frac{HB^2}{3}.$$

Par conséquent, les coordonnées du centre de gravité du triangle sont données par

$$\bar{x} = \frac{HB^2}{3M} = \frac{2}{3}B, \qquad \bar{y} = \frac{H^2B}{6M} = \frac{H}{3}.$$

Exemple 12. Considérons maintenant la région du premier quadrant, bornée par la parabole $y = 4 - x^2$. L'aire de cette région est donnée par

$$S = \int_0^2 (4 - x^2)dx = \frac{16}{3}.$$

Le moment de la figure par rapport à l'axe x est égal à

$$M_x = \int_0^2 \frac{4-x^2}{2}(4-x^2)dx = \frac{128}{15},$$

et le moment par rapport à l'axe y est donné par

$$M_y = \int_0^2 x(4-x^2)dx = 4.$$

On conclut que les coordonnées du centre de gravité sont données par

$$\bar{x} = \frac{4}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}, \qquad \bar{y} = \frac{\frac{128}{15}}{\frac{16}{3}} = \frac{8}{5}.$$

7. Centre de gravité d'un corps de révolution

Dans ce paragraphe, nous considérons le corps de révolution engendré par la rotation autour de l'axe x de la région bornée par la courbe $y = f(x)$, l'axe x et les droites verticales $x = a$ et $x = b$. Pour des raisons de symétrie, il est évident que le centre de gravité de ce corps sera situé sur l'axe de rotation, c'est-à-dire que $\bar{y} = \bar{z} = 0$. Supposons maintenant que le centre de gravité est situé dans le point $(\bar{x}, 0, 0)$. La masse totale du corps de révolution est donnée par

$$M = V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx,$$

et le moment du corps par rapport au plan YZ est, par conséquent, égal à

$$M_{yz} = M\bar{x}.$$

Comme avant, on divise maintenant la région plane en une série de rectangles élémentaires de base dx et de hauteur $f(x)$. La rotation autour de l'axe x engendre alors un cylindre dont la masse totale (ou le volume) est donnée par

$$dM = \pi f(x)^2 dx.$$

Le centre de gravité de ce cylindre est situé dans le point $(x, 0, 0)$, et le moment du cylindre par rapport au plan YZ est donc donné par xdM. Le moment total du corps de révolution par rapport au plan YZ est alors égal à

$$M_{yz} = \pi \int_a^b x f(x)^2 dx,$$

et on conclut que

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}.$$

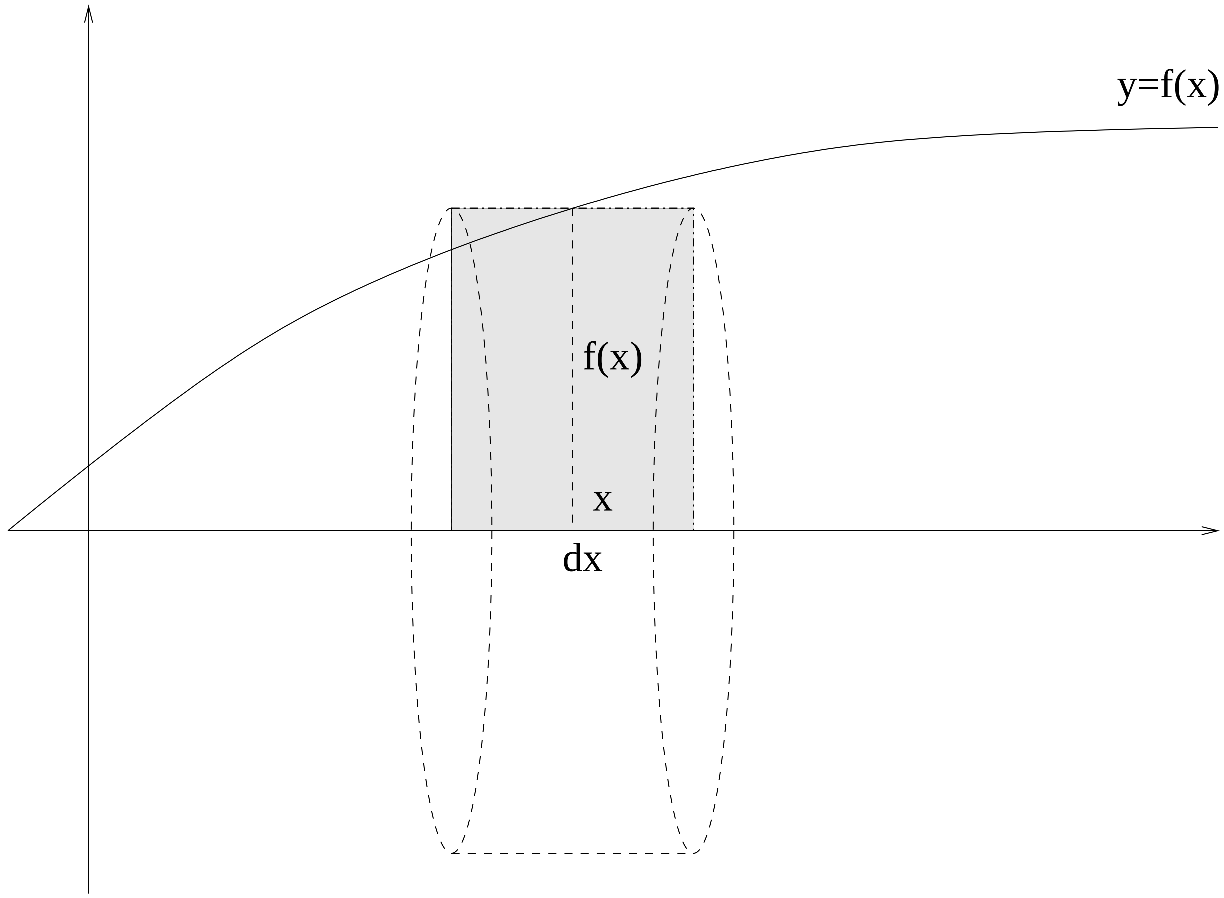

Figure 55. *Moment d'un cylindre élémentaire.*

Exemple 13. Considérons de nouveau le cône de rayon R et de hauteur H, engendré par la région triangulaire bornée par $y = \frac{R}{H}x$, l'axe x et la droite verticale $x = H$ après une rotation autour de l'axe x. Le moment du cône par rapport au plan YZ est égal à

$$M_{yz} = \pi \int_0^H x(\frac{R}{H}x)^2 dx = \frac{\pi R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx = \frac{\pi R^2 H^2}{4},$$

et le centre de gravité est donc situé au point

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{3H}{4}.$$

Exemple 14. Considérons la région du premier quadrant, bornée par la parabole $y = 4 - x^2$, et exécutons une rotation autour de l'axe x. Le moment par rapport au plan YZ du corps de révolution engendré est égal à

$$M_{yz} = \pi \int_0^2 x(4 - x^2)^2 dx = \frac{32\pi}{3},$$

et le volume de ce corps est donné par

$$V = \pi \int_0^2 (4 - x^2)^2 dx = \frac{256\pi}{15}.$$

La coordonnée x du centre de gravité est donc égale à

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{V} = \frac{5}{8}.$$

8. Moment d'inertie d'une figure plane

Le *moment d'inertie* d'un point de masse m par rapport à un axe est défini comme le produit de la masse m et le carré de la distance r entre le point et l'axe, $I = mr^2$. Pour un rectangle élémentaire de dimensions dx et dy autour du point (x, y) les moment d'inertie par rapport aux axes x et y sont donnés par

$$dI_x = y^2 dxdy, \qquad dI_y = x^2 dxdy.$$

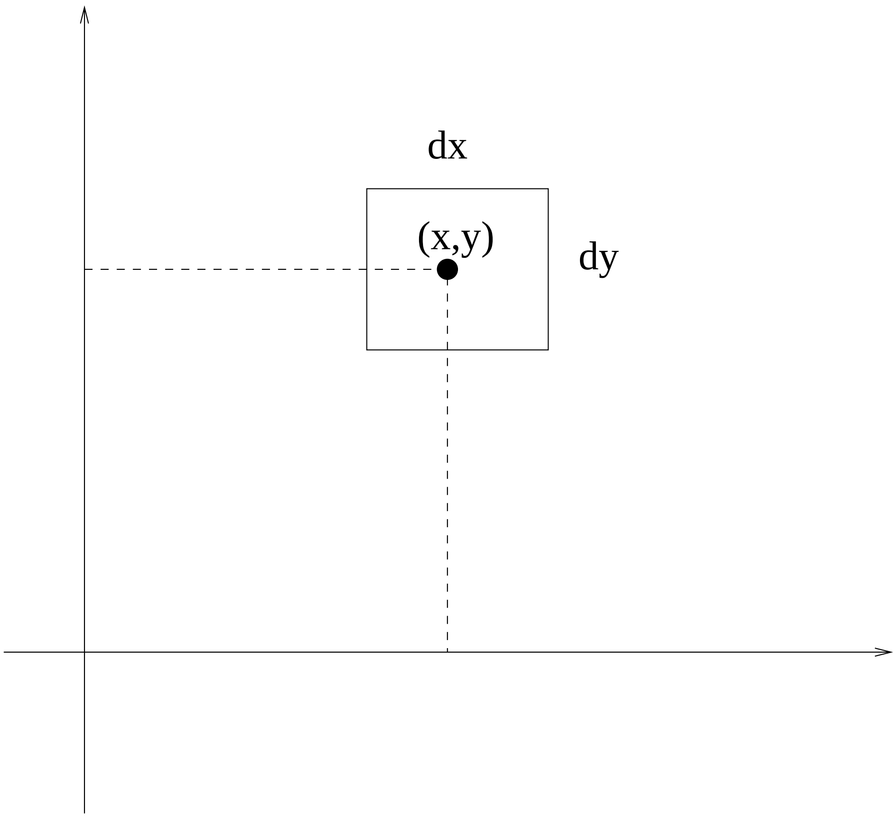

Figure 56. *Moments d'inertie d'un rectangle élémentaire.*

Considérons d'abord un rectangle élémentaire de hauteur dx et de longueur $L = x_2 - x_1$ parallèle à l'axe x. En divisant ce rectangle en rectangles élémentaires (Figure 57) de dimensions dx et dy on déduit que le moment d'inertie par rapport à l'axe x est donné par

$$dI_x = y^2 dxdy,$$

et le moment d'inertie du rectangle élémentaire par rapport à l'axe x est donc donné par

$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} y^2 dxdy = (x_2 - x_1) y^2 dy = Ly^2 dy.$$

Considérons ensuite un rectangle élémentaire perpendiculaire à l'axe x. En divisant ce rectangle de nouveau en rectangles élémentaires de dimensions dx et dy on voit que

$$dI_x = y^2 dxdy,$$

et, par conséquent,

$$I_x = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dx dy = \frac{1}{3}(y_2^3 - y_1^3)dx.$$

Dans le cas spécial où le rectangle a l'axe x comme un de ses côtés (et hauteur H) ceci nous montre que

$$I_x = \frac{H^3}{3} dx.$$

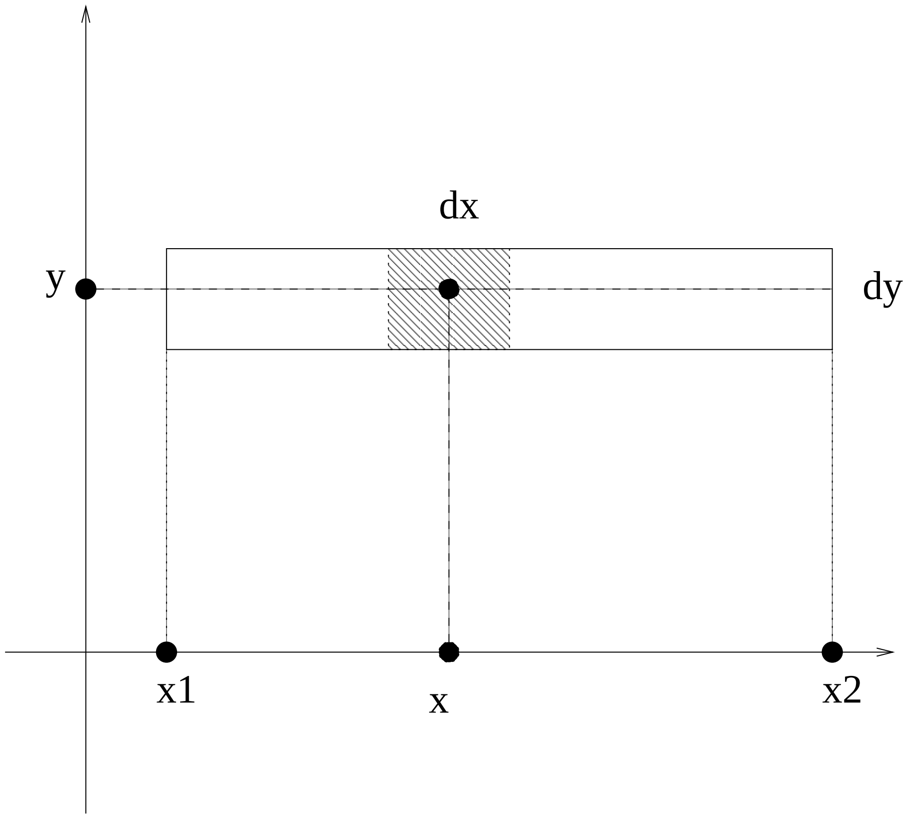

Figure 57. *Moment d'inertie d'un rectangle élémentaire.*

Afin de calculer le moment d'inertie d'une figure plane par rapport à un axe, on divise la figure en une série de rectangles élémentaires qui sont parallèles ou perpendiculaires à cet axe. Le moment d'inertie total est alors égal à la somme des moments d'inertie de tous ces rectangles élémentaires.

Exemple 15. Considérons le rectangle borné par la droite $y = H$, l'axe x et les droites verticales $x = 0$ et $x = B$, et calculons le moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe x. En divisant la figure en rectangles élémentaires parallèles à l'axe x (donc de largeur B et de hauteur dy) on voit que le moment d'inertie d'un rectangle élémentaire est donné par

$$dI_x = y^2 B dy,$$

et le moment d'inertie total du rectangle est donc égal à

$$I_x = \int_0^H By^2 dy = \frac{1}{3} BH^3.$$

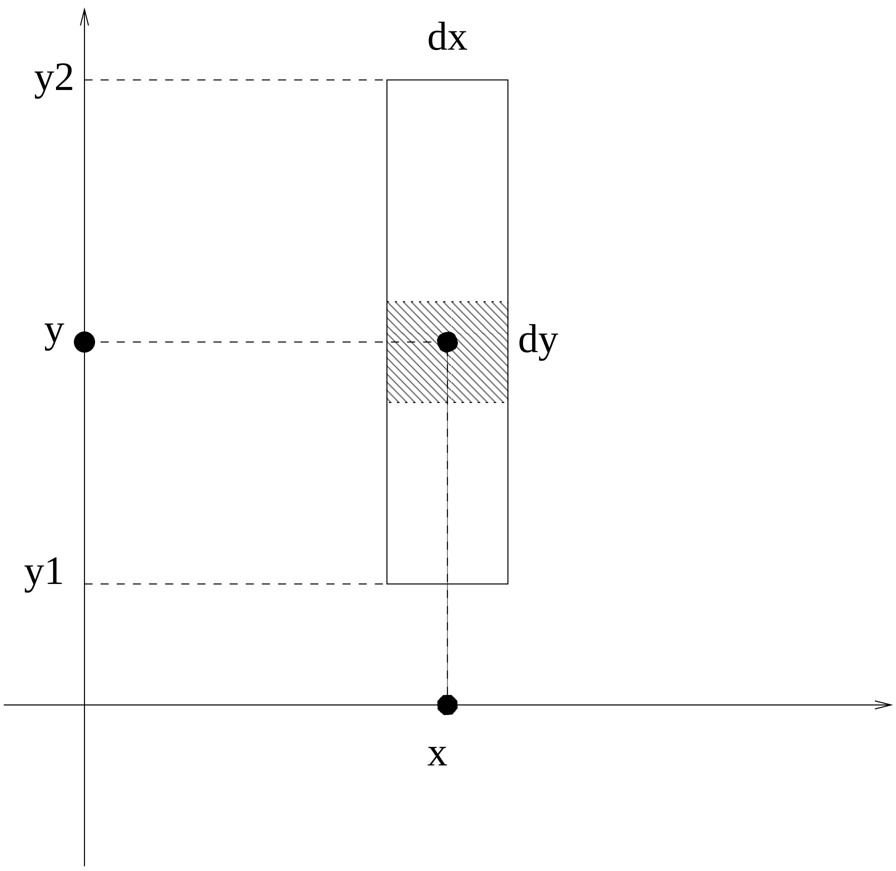

Figure 58. *Moment d'inertie d'un rectangle élémentaire.*

En divisant le rectangle en rectangles élémentaires perpendiculaires à l'axe x (de hauteur H et de largeur dx) on voit que le moment d'inertie du rectangle élémentaire est égal à

$$dI_x = \frac{H^3}{3} dx,$$

et le moment d'inertie total est, par conséquent, donné par

$$I_x = \int_0^B \frac{H^3}{3} dx = \frac{1}{3} H^3 B.$$

Exemple 16. Considérons maintenant la région bornée par la parabole $y = 4 - x^2$ et l'axe x, et calculons le moment d'inertie de la figure par rapport à l'axe x. A cet effet, on divise la figure en rectangles élémentaires perpendiculaires à l'axe x (de largeur dx et de hauteur $4 - x^2$). Le moment d'inertie de chaque rectangle est alors donné par

$$dI_x = \frac{1}{3}(4 - x^2)^3 dx,$$

et le moment d'inertie total est donc égal à

$$I_x = \int_{-2}^{2} dI_x = \frac{4096}{15}.$$

Afin de calculer le moment d'inertie de la figure par rapport à l'axe y, on utilise la même division en rectangles élémentaires. Ces rectangles sont maintenant parallèles à l'axe y, et leur moment d'inertie est donc donné par

$$dI_y = x^2(4 - x^2)dx.$$

Le moment d'inertie total est, par conséquent, égal à

$$I_y = \int_{-2}^{2} dI_y = \frac{128}{15}.$$

9. Moment d'inertie d'un corps de révolution

Finalement, on calculera maintenant le moment d'inertie d'un corps de révolution par rapport à son axe de rotation. A cet effet, on considère d'abord un rectangle élémentaire de dimensions dx et dy autour d'un point (x, y). Si on exécute une rotation autour de l'axe x, ce rectangle engendre (Figure 59) un anneau, dont la masse totale est donnée par

$$dM = 2\pi y dx dy,$$

et le moment d'inertie de cet anneau par rapport à l'axe x est donc égal à

$$dI_x = 2\pi y^3 dx dy.$$

Considérons ensuite un rectangle élémentaire parallèle à l'axe de rotation. En exécutant la rotation autour de l'axe x on obtient un tube (Figure 60) de rayon y, épaisseur dy et longueur L. Division en rectangles élémentaires nous montre que le moment d'inertie d'un tel tube est donné par

$$dI_x = \int_{x_1}^{x_2} 2\pi y^3 dx dy = 2\pi L y^3 dy.$$

Maintenant, considérons un rectangle élémentaire perpendiculaire à l'axe de rotation x, de hauteur R et de largeur dx. Une rotation autour de l'axe x engendre alors un cylindre élémentaire (Figure 61) de rayon R et de hauteur dx. De nouveau, une division en rectangles élémentaires montre que le moment d'inertie de ce cylindre est donné par

$$dI_x = \int_0^R 2\pi y^3 dx dy = 2\pi \frac{R^4}{4} dx = \frac{\pi R^4}{2} dx.$$

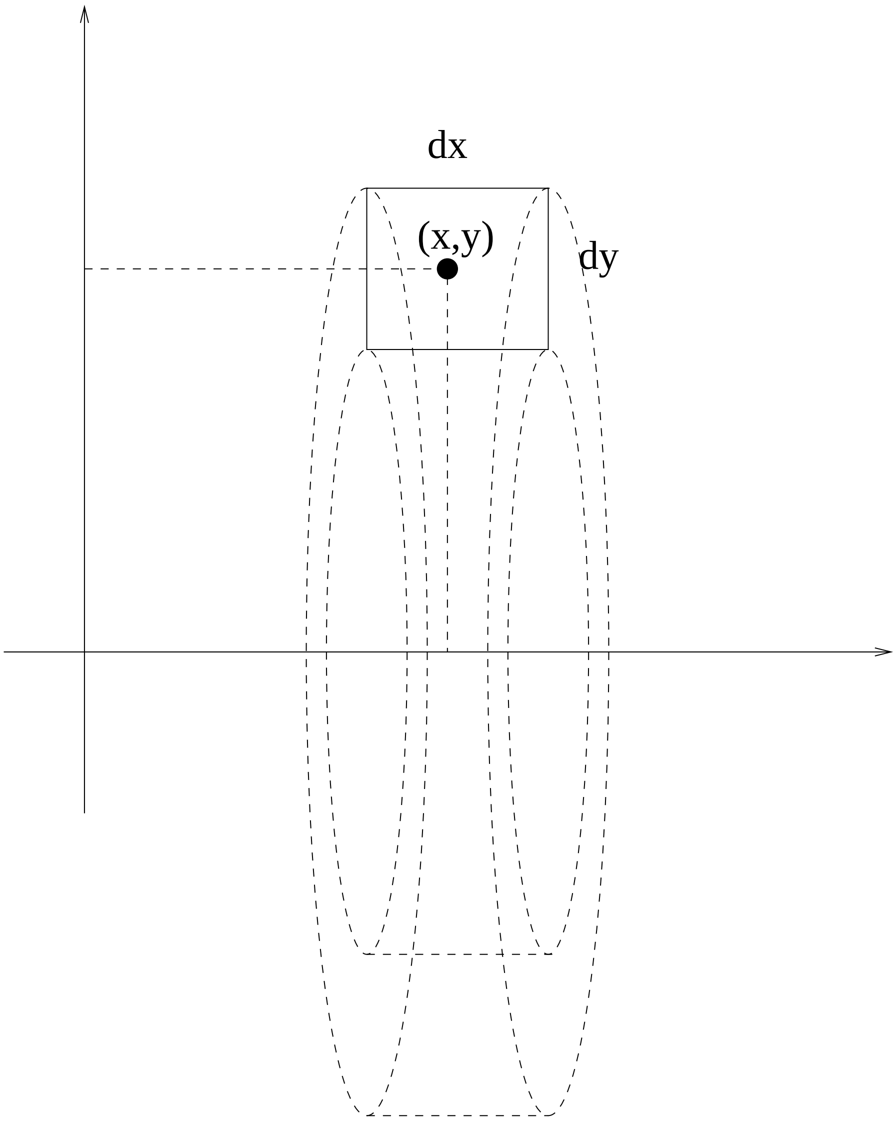

Figure 59. *Moment d'inertie d'un anneau élémentaire.*

Afin de calculer le moment d'inertie d'un corps de révolution arbitraire par rapport à son axe de rotation, on divise la figure comme avant en rectangles élémentaires qui sont parallèles ou perpendiculaires à l'axe de rotation. Le moment d'inertie total du corps est alors la somme de tous les moments d'inertie des tubes ou des cylindres élémentaires qu'on engendre de cette façon.

Exemple 17. La rotation autour de l'axe x du rectangle de hauteur R et de largeur H engendre un cylindre de rayon R et de hauteur H. Pour calculer le moment d'inertie du cylindre, on divise d'abord le rectangle en une série de rectangles élémentaires parallèles à l'axe x (hauteur dy, largeur H et à distance y de l'axe de rotation). Après rotation, ces rectangles engendrent des tubes dont le moment d'inertie par rapport à l'axe x est donné par

$$dI_x = 2\pi y^3 H dy,$$

et le moment d'inertie du cylindre est donc égal à

$$I_x = 2\pi H \int_0^R y^3 dy = \frac{\pi H R^4}{2}.$$

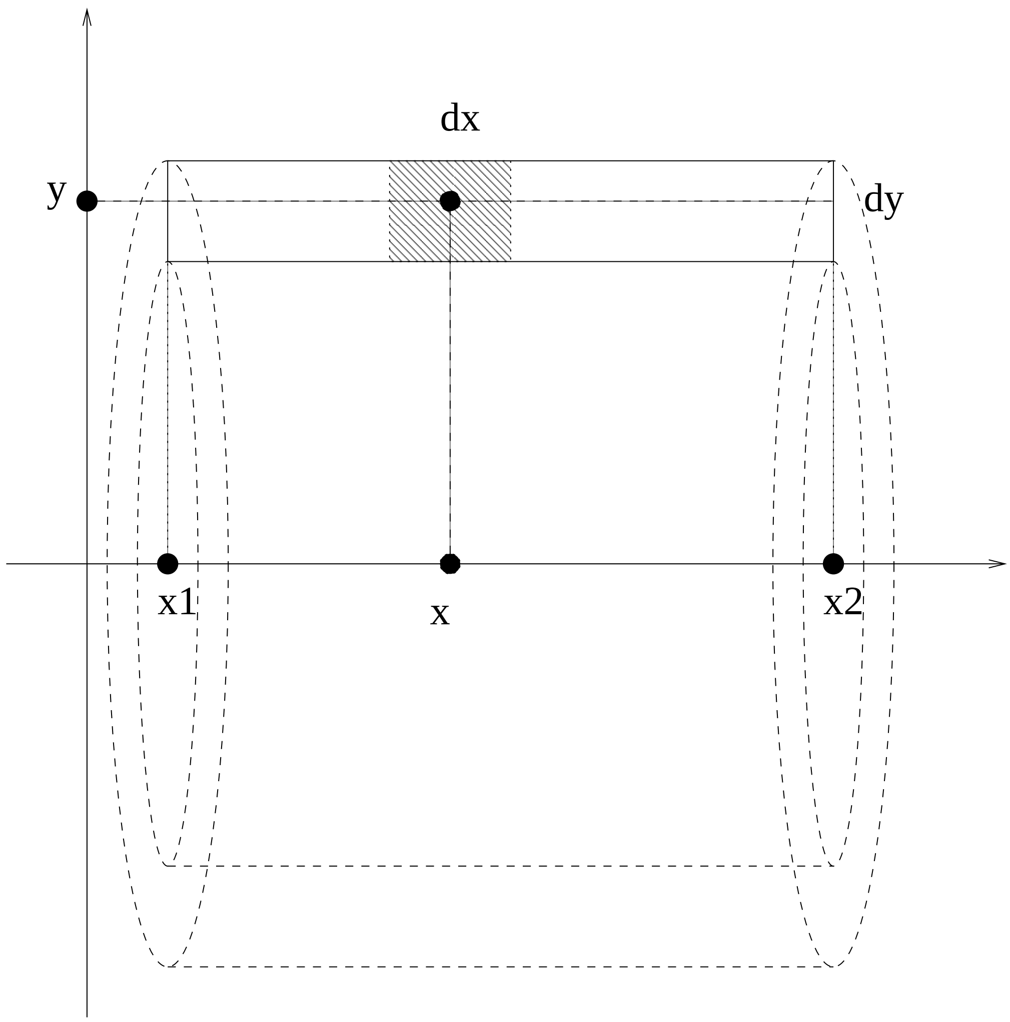

Figure 60. *Moment d'inertie d'un tube élémentaire.*

On peut également diviser le rectangle en rectangles élémentaires perpendiculaires à l'axe x (largeur dx et hauteur R). Après une rotation autour de l'axe x on obtient alors des cylindres élémentaires dont le moment d'inertie est donné par

$$dI_x = \frac{\pi R^4}{2} dx,$$

et on conclut de nouveau que le moment d'inertie par rapport à l'axe x du cylindre total est égal à

$$I_x = \frac{\pi R^4}{2} \int_0^H dx = \frac{\pi R^4 H}{2}.$$

Exemple 18. Considérons la région bornée par la parabole $y = 4x - x^2$ et l'axe x, et exécutons une rotation autour de l'axe x. Afin de calculer le moment d'inertie du corps de révolution engendré de cette façon, on divise la figure plane en rectangle élémentaires perpendiculaires à l'axe x (largeur dx et hauteur $4x - x^2$). La rotation autour de l'axe x engendre alors un cylindre élémentaire dont le moment d'inertie est donné par

$$dI_x = \frac{\pi(4x - x^2)^4}{2} dx.$$

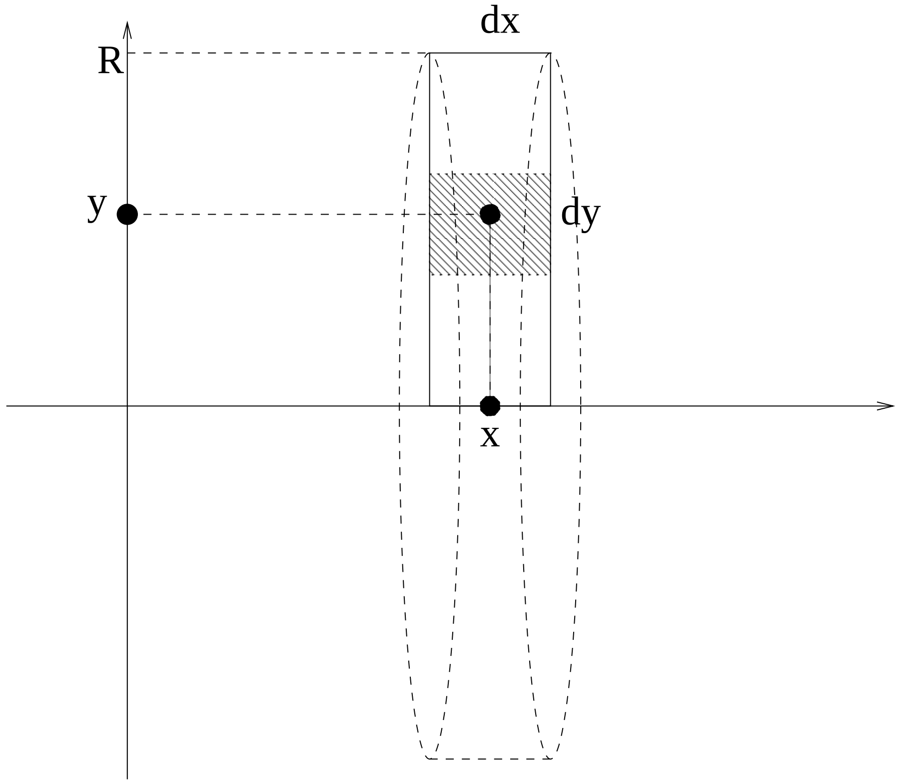

Figure 61. *Moment d'inertie d'un cylindre élémentaire.*

Le moment d'inertie du corps est donc donné par

$$I_x = \int_0^4 \frac{\pi(4x - x^2)^4}{2} dx = \frac{65536\pi}{315}.$$

Exemple 19. On considère maintenant la figure plane introduite dans l'exemple précédent, mais cette fois ci on exécute une rotation autour de l'axe y. Pour calculer le moment d'inertie du corps de révolution engendré de cette façon, on utilise la même division en rectangles élémentaires qu'avant. Ces rectangles sont maintenant parallèles à l'axe y (largeur dx, hauteur $4x - x^2$ et à une distance x de l'axe y). La rotation autour de l'axe y engendre alors des tubes dont le moment d'inertie est donné par

$$dI_y = x^2 2\pi x(4x - x^2)dx.$$

Le moment d'inertie total est alors donné par

$$I_y = 2\pi \int_0^4 x^3(4x - x^2)dx = \frac{4096\pi}{15}.$$

Chapitre 12

Intégration numérique

1. Introduction

Pour calculer une intégrale définie
$$\int_a^b f(x)dx$$
d'une fonction réelle donnée sur un intervalle $[a,b]$ on a toujours utilisé le *théorème fondamental du calcul intégral*, qui nous apprend que
$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a),$$
où $F(x)$ est une fonction primitive (arbitraire) de $f(x)$, c'est-à-dire que
$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Pour certaines fonctions réelles, le calcul d'une fonction primitive (donc de l'intégrale indéfinie) est impossible (par exemple pour la fonction $y = e^{-x^2}$) ou très difficile. Dans ces cas, on fait appel à une série de techniques qui permettent le calcul *approximatif* (avec une précision arbitraire) de l'intégrale souhaitée. A cet effet, on calcule, d'une certaine manière, une valeur approchée pour l'aire de la surface bornée par le graphique de la fonction $y = f(x)$ et l'axe x. Dans ce chapitre, on étudie trois techniques de ce type.

2. La règle du point central (midpoint rule)

Afin de calculer (approximativement) l'intégrale définie

$$\int_a^b f(x)dx$$

de la fonction $y = f(x)$ sur un intervalle $[a, b]$, on divise d'abord cet intervalle en n sous-intervalles de la même longueur

$$h = \frac{b-a}{n},$$

et on dénote les bornes de ces sous-intervalles par

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dans chaque sous-intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ on calcule alors le point central, qu'on dénote par

$$m_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

Il est maintenant clair que l'aire de la surface bornée par le graphique de la fonction $y = f(x)$ et l'axe x (et donc la valeur de l'intégrale définie) est, approximativement, donnée par la somme des aires des rectangles de base h et de hauteur $f(m_i)$, donc par

$$f(m_1)h + f(m_2)h + \ldots + f(m_n)h = h \sum_{i=1}^{n} f(m_i).$$

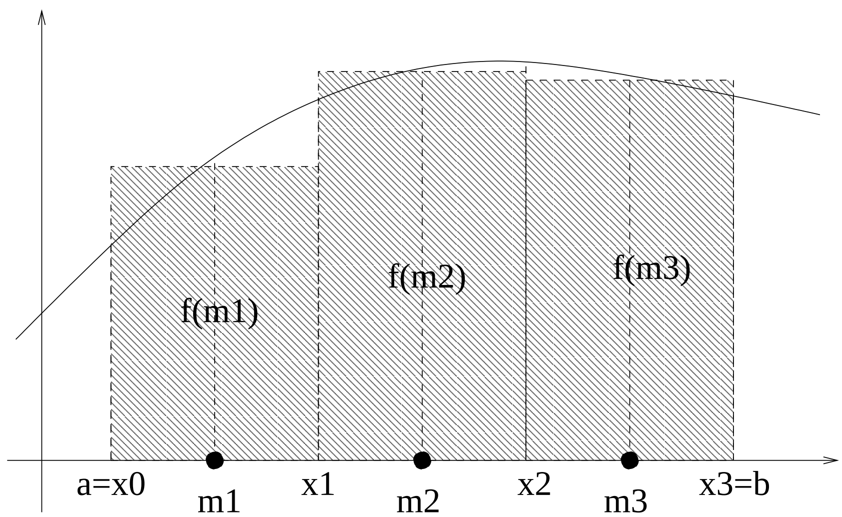

Figure 62. *La règle du point central*

Exemple 1. Pour calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx$$

à l'aide de la règle du point central, on divise l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ en 5 pièces de longueur

$$h = \frac{\frac{1}{2} - 0}{5} = \frac{1}{10}.$$

Les points extrêmes des sous-intervalles sont alors donnés par

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{10}, \quad x_2 = \frac{2}{10}, \quad x_3 = \frac{3}{10}, \quad x_4 = \frac{4}{10}, \quad x_5 = \frac{5}{10},$$

et les points centrales des intervalles sont donc

$$m_1 = \frac{1}{20}, \quad m_2 = \frac{3}{20}, \quad m_3 = \frac{5}{20}, \quad m_4 = \frac{7}{20}, \quad m_5 = \frac{9}{20}.$$

Les images de ces points centrales sous la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sont

$$f(m_1) = 0.9975, \quad f(m_2) = 0.9780, \quad f(m_3) = 0.9412, \quad f(m_4) = 0.8909, \quad f(m_5) = 0.8316,$$

et la valeur approchée de l'intégrale est, par conséquent, donnée par

$$\frac{1}{10}(f(m_1) + \ldots + f(m_5)) = \frac{4.6392}{10} = 0.4639.$$

On remarque que la valeur précise de l'intégrale est égale à

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg}(x)|_0^{\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg}(\frac{1}{2}) = 0.46364761.$$

3. La règle des trapèzes

Cette méthode demande, de nouveau, la division de l'intervalle $[a, b]$ en n pièces de la même longueur

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Comme avant, on dénote les points extrêmes de chaque intervalle par

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Les images de ces points sont dénotées par

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

L'aire de la surface entre la courbe et l'axe x est maintenant calculée, approximativement, comme la somme des aires d'une série de trapèzes de hauteur h et dont les bases sont donnés par y_{i-1} et y_i. L'aire d'un tel trapèze est donnée par

$$S_i = h\frac{y_i + y_{i-1}}{2},$$

et on conclut que l'intégrale définie est donnée (approximativement) par

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} h\frac{y_{i-1} + y_i}{2} = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \ldots + 2y_{n-1} + y_n).$$

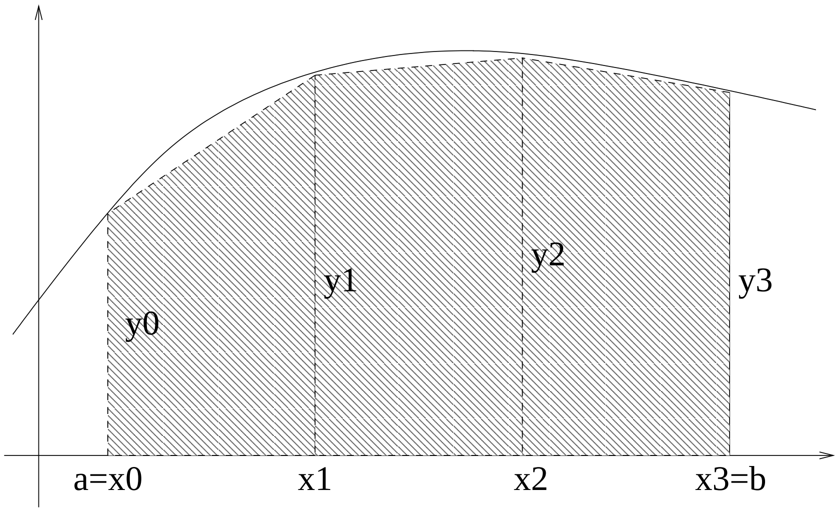

Figure 63. *La règle des trapèzes*

Exemple 2. On calcule de nouveau l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

mais on utilise maintenant la règle des trapèzes. A cet effet, on divise l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ de nouveau en une série de 5 sous-intervalles de longueur

$$h = \frac{1}{10}.$$

Comme avant, les points extrêmes de ces intervalles sont donnés par

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{10}, \quad x_2 = \frac{2}{10}, \quad x_3 = \frac{3}{10}, \quad x_4 = \frac{4}{10}, \quad x_5 = \frac{5}{10},$$

et les images de ces points sous la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ prennent donc les valeurs

$$\begin{array}{lll} y_0 = f(x_0) = 1, & y_1 = f(x_1) = 0.9901, & y_2 = f(x_2) = 0.9615, \\ y_3 = f(x_3) = 0.9174, & y_4 = f(x_4) = 0.8621, & y_5 = f(x_5) = 0.8. \end{array}$$

La valeur approchée de l'intégrale définie est maintenant donnée par

$$\frac{1}{20}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5) = \frac{9.2622}{20} = 0.4631.$$

4. La règle de Simpson

Pour calculer (approximativement) une intégrale définie à l'aide de la règle de Simpson, on divise d'abord l'intervalle $[a, b]$ en un nombre *pair* de sous-intervalles (on dénote le nombre par $2n$) de la même longueur

$$h = \frac{b-a}{2n}.$$

Comme avant, on dénote par

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n-1} < x_{2n} = b,$$

les points extrêmes de ces sous-intervalles, et par

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, 2n,$$

les images de ces points sous la fonction $f(x)$.

A chaque ensemble de trois points consécutifs x_{2i-2}, x_{2i-1}, x_{2i}, on associe une parabole, donnée par l'équation $y = Ax^2 + Bx + C$, où A, B et C sont tels que la parabole et la courbe $y = f(x)$ coïncident dans les trois points

$$P_{2i-2} = (x_{2i-2}, y_{2i-2}), \quad P_{2i-1} = (x_{2i-1}, y_{2i-1}), \quad P_{2i} = (x_{2i}, y_{2i}).$$

L'aire de la surface entre l'axe x et la parabole est donnée par

$$S_i = \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} (Ax^2 + Bx + C)dx,$$

et on peut maintenant calculer la valeur approchée de l'aire de la surface entre l'axe x et la courbe $y = f(x)$ comme la somme des aires S_i entre l'axe x et ces n paraboles.

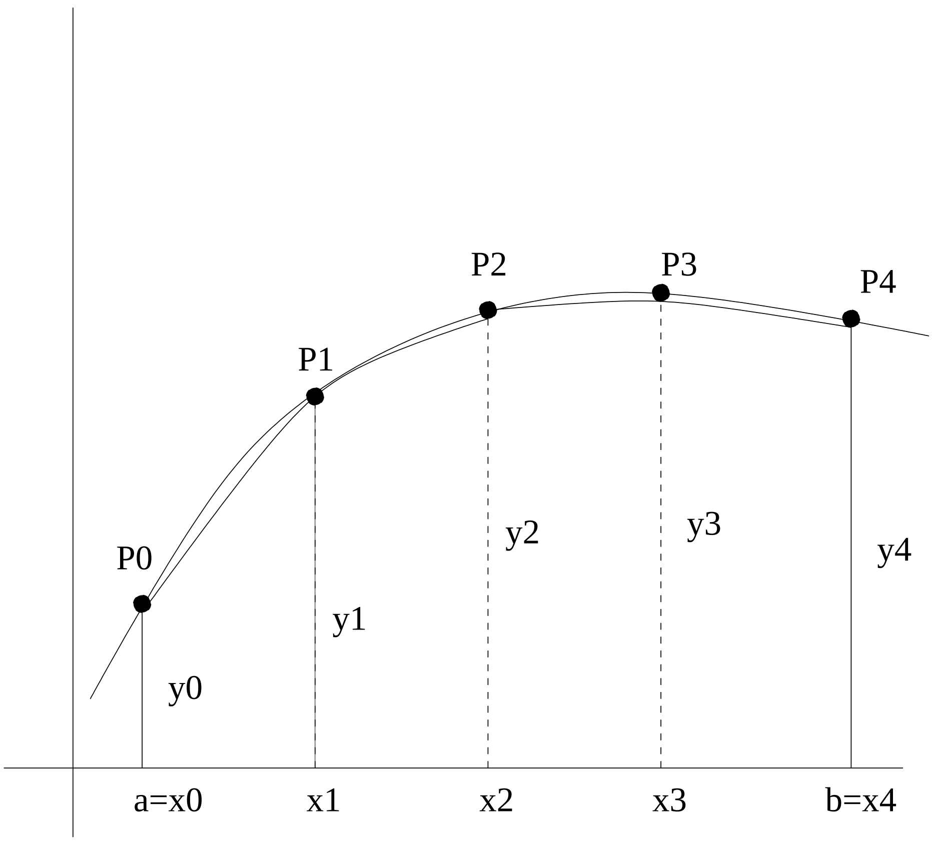

Figure 64. *La règle de Simpson*

Calculons maintenant l'aire de la surface entre l'axe x et une de ces paraboles. Considérons, par exemple, la parabole contenant les points

$$P_0 = (x_0, y_0), \quad P_1 = (x_1, y_1), \quad P_2 = (x_2, y_2).$$

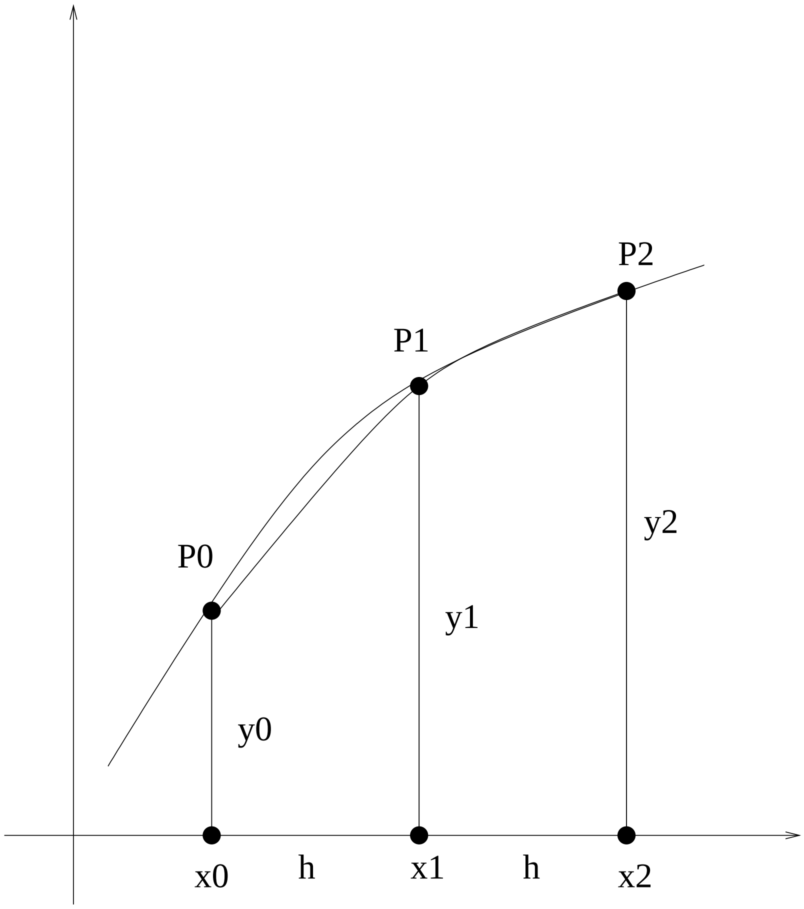

Figure 65. *La règle de Simpson*

La parabole a une équation de la forme

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

et, par conséquent, la surface bornée par cette parabole et l'axe x a une aire

$$\begin{aligned} S &= \int_{x_0}^{x_2} (Ax^2 + Bx + C)dx \\ &= \frac{A}{3}(x_2^3 - x_0^3) + \frac{B}{2}(x_2^2 - x_0^2) + C(x_2 - x_0) \\ &= (x_2 - x_0)(\frac{A}{3}(x_2^2 + x_0x_2 + x_0^2) + \frac{B}{2}(x_2 + x_0) + C) \\ &= 2h(\frac{A}{3}(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + \frac{B}{2}(2x_0 + 2h) + C) \\ &= \frac{h}{3}(2A(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + 6B(x_0 + h) + 6C). \end{aligned}$$

Les nombres A, B, C sont choisis d'une telle façon que

$$y_0 = Ax_0^2 + Bx_0 + C, \quad y_1 = Ax_1^2 + Bx_1 + C, \quad y_2 = Ax_2^2 + Bx_2 + C,$$

impliquant que

$$\begin{aligned} &y_0 + 4y_1 + y_2 \\ &\quad = (Ax_0^2 + Bx_0 + C) + 4(Ax_1^2 + Bx_1 + C) + (Ax_2^2 + Bx_2 + C) \\ &\quad = 6Ax_0^2 + 12Ahx_0 + 8Ah^2 + 6Bx_0 + 6Bh + 6C \\ &\quad = 2A(3x_0^2 + 6hx_0 + 4h^2) + 6B(x_0 + h) + 6C. \end{aligned}$$

On conclut que

$$S = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

On voit donc que l'aire de la surface bornée par la courbe $y = f(x)$ et l'axe x est donnée (approximativement) par

$$\begin{aligned} &\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots + \frac{h}{3}(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \\ &\qquad = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \ldots + 2y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}. \end{aligned}$$

Exemple 3. Calculons de nouveau l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx,$$

en utilisant maintenant la règle de Simpson avec $n = 2$. A cet effet, nous divisons l'intervalle $[0, \frac{1}{2}]$ en 4 pièces de longueur $h = \frac{1}{8}$. Les points extrêmes de ces intervalles sont donnés par

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{8}, \quad x_2 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad x_3 = \frac{3}{8}, \quad x_4 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

et les images de ces points sous la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ prennent les valeurs

$$y_0 = 1, \quad y_1 = 0.9846, \quad y_2 = 0.9412, \quad y_3 = 0.8767, \quad y_4 = 0.8.$$

La valeur approchée de l'intégrale définie est alors donnée par

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = \frac{11.1276}{24} = 0.46365.$$