Calcul vectoriel

Peter Bueken

Hogere Zeevaartschool
Noordkasteel Oost 6
B-2030 Antwerpen

Bachelor en Sciences Nautiques
Année académique 2014-2015

Outline

- Scalaires
  - Fonctions d'une ou de plusieurs variables, calcul différentiel et intégral
  - Objets physiques représentés par une “quantité” (nombre + unité)
  - SCALAIRE
  - distance (m), température (K), masse (kg), . . .
- Vectorielles
  - Pour la description d'autres phénomènes il faut plus d'information
  - longueur / direction / sens / (point initial)
  - VECTEUR
  - mouvement, force, . . .

Scalaires et vecteurs

- Scalaires
  - Fonctions d'une ou de plusieurs variables,
    calcul différentiel et intégral
  - Objets physiques représentés par une “quantité” (nombre + unité)
  - SCALAIRE
  - distance (m), température (K), masse (kg), . . .
- Vectorielles
  - Pour la description d'autres phénomènes il faut plus d'information
  - longueur / direction / sens / (point initial)
  - VECTEUR
  - mouvement, force, . . .

Qu'est-ce qui suit ?

- Introduction et étude de vecteurs
- Opérations de base
- Quelques applications (géométriques, physiques)

Vecteur lié

Definition - Vecteur lié

Un *vecteur lié* (dans le plan ou dans l'espace) est formé par une paire de points (A, B) dans un ordre donné.

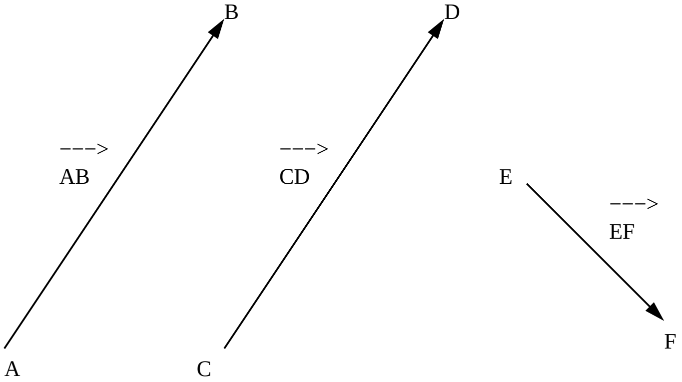
- On représente un vecteur lié par $\vec{AB}$.
- A point initial
- B point final
- Ordre est important (sens), $\vec{AB} \neq \vec{BA}$, vecteurs liés opposés

Definition - Module

Le *module* $|\vec{AB}|$ du vecteur lié $\vec{AB}$ est donné par la distance entre A et B.

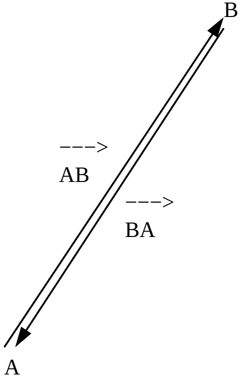
Vecteur lié - représentation graphique

Un vecteur lié $\vec{AB}$ est représenté par une flèche du point initial A au point final B.



Vecteurs liés opposés

Deux vecteurs liés opposés $\vec{AB}$ et $\vec{BA}$



Vecteur libre

- Vecteur lié
  longueur (module) / direction / sens / point initial
- Parfois le point initial ne joue par un rôle important,
  seulement longueur / direction / sens
- On considère alors deux vecteurs liés comme “identiques” (le même vecteur libre) s’ils ont la
  même longueur / direction / sens,
  mais un autre point initial
- $\vec{AB} \sim \vec{CD}$ s’il existe un déplacement t tel que $t(A) = C$ et $t(B) = D$
- Paires (A, B) et (C, D) sont *équipollents*

Definition - Vecteur (libre)

Un *vecteur (libre)* (dans le plan ou dans l’espace) est une classe d’équivalence de vecteurs liés (correspondants aux paires de points équipollents).

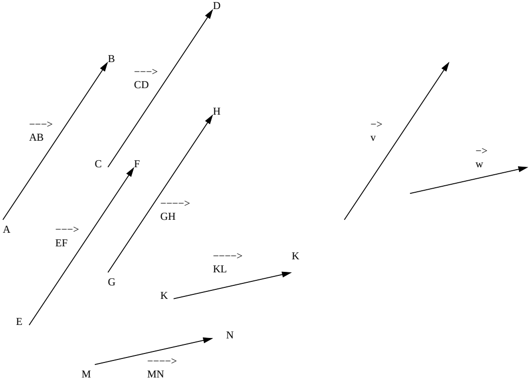
Vecteur libre

- Les vecteurs libres seront représentés par $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{a}$,...
- Les vecteurs liés $\vec{AB}$ sont des représentants du vecteur libre $\vec{v}$ (avec point initial variable)
- Vecteur libre $\vec{v}$ correspond à $\vec{AB}$,
  le vecteur *opposé* $-\vec{v}$ correspond à $\vec{BA}$
  même direction / longueur, sens opposé

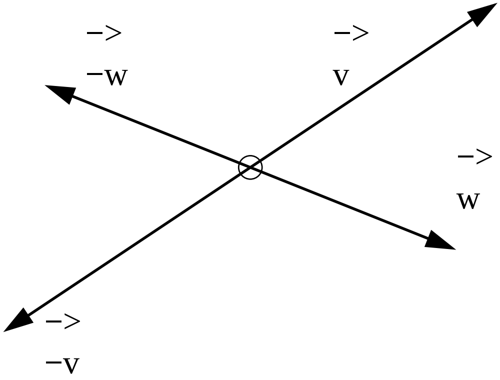
Definition - Module

Le *module* $|\vec{v}|$ d'un vecteur libre $\vec{v}$ est le module d'un vecteur lié $\vec{AB}$ correspondant.

Deux vecteurs libres et quelques représentants.



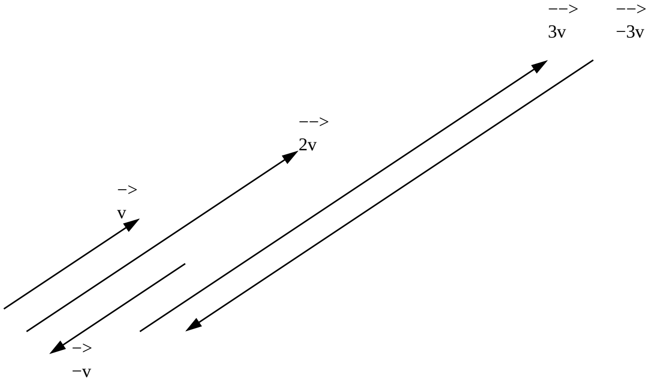
Vecteur opposé



Multiple scalaire d'un vecteur

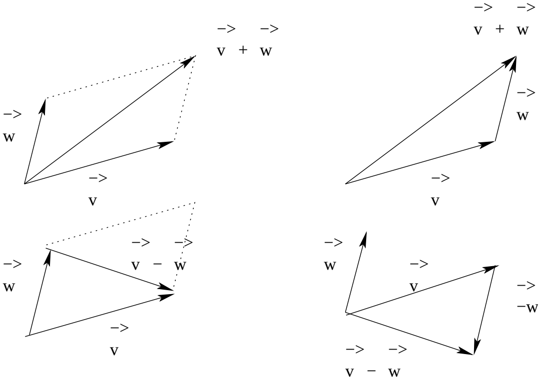
- Etant donné un vecteur libre $\vec{v}$ et un nombre α
- On construit un nouveau vecteur $\alpha\vec{v}$
- Même direction que $\vec{v}$
- Même sens que $\vec{v}$ si $\alpha > 0$,
  Sens opposé de $\vec{v}$ si $\alpha < 0$
- Longueur $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$

Multiple scalaire - représentation graphique



Somme et différence de vecteurs

- Etant donné deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$
- La somme ou la résultante $\vec{v} + \vec{w}$, deux constructions équivalentes
- Différence $\vec{v} - \vec{w}$
  $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$



Vecteurs spéciaux

Definition - Vector zéro

Le *vecteur zéro* $|\vec{o}|$ est le vecteur libre correspondant au vecteur lié $\vec{AA}$. Le module du vecteur zéro est $|\vec{o}| = 0$.

Definition - Vecteur unitaire

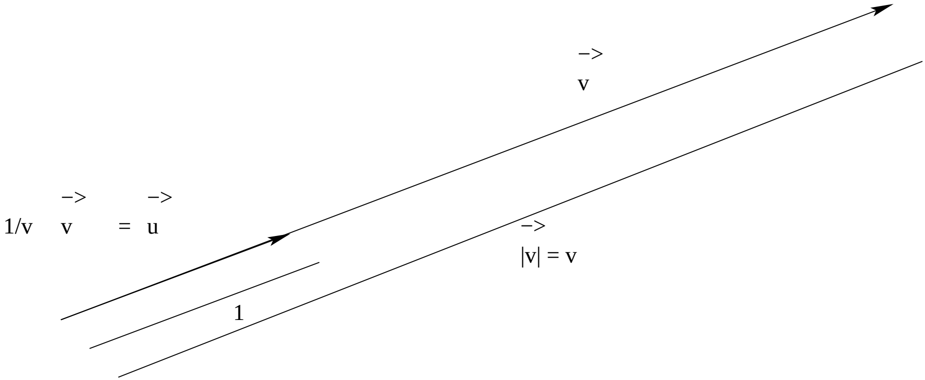
Un *vecteur unitaire* $\vec{u}$ est un vecteur libre dont le module est égal à $|\vec{u}| = 1$.

Normalisation d'un vecteur

- Considérons un vecteur libre $\vec{v} \neq \vec{o}$.
- $|\vec{v}| \neq 0$, donc $\alpha = \frac{1}{|\vec{v}|}$ est une valeur réelle
- Construisons le multiple scalaire $\alpha\vec{v}$
- Même direction et sens que $\vec{v}$,
  module $|\alpha||\vec{v}| = 1$, donc vecteur unitaire
- Vecteur normalisé

$$\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Normalisation d'un vecteur



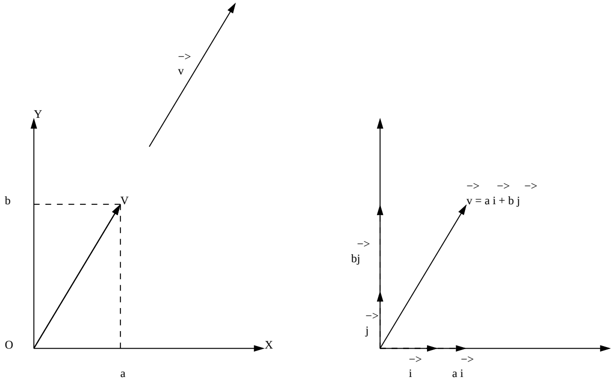
Composantes d'un vecteur

- On cherche une méthode pour la représentation numérique des vecteurs libres
- Les calculs dans la suite seront faites avec cette représentation

Composantes d'un vecteur dans le plan

- Choisissons dans le plan un point de référence fixe O
- On considère deux axes perpendiculaires à travers le point O
  axe X
  axe Y
- On obtient alors un repère Oxy :
  un point V dans le plan est complètement déterminé par deux valeurs réelles, les coordonnées (x, y)

Composantes d'un vecteur dans le plan



- Considérons un vecteur libre $\vec{v}$ dans le plan
- On choisit le représentant de $\vec{v}$ avec point initial O, vecteur lié $\vec{OV}$
- Point final V détermine le vecteur $\vec{v}$

Definition - Composantes

Les *composantes* du vecteur libre $\vec{v}$ dans le plan sont les coordonnées (a, b) du point final V du représentant $\vec{OV}$ de ce vecteur libre.

Composantes d'un vecteur dans le plan

- Le vecteur dont les composantes sont $(1, 0)$ est dénoté par $\vec{i}$
- Le vecteur dont les composantes sont $(0, 1)$ est dénoté par $\vec{j}$
- Le vecteur $\vec{v}$ avec composantes (a, b) correspond alors avec une somme
$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$$

Opérations avec les composantes

- Etant donné deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et une valeur scalaire α
- $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$,
  $\vec{v}$ avec composantes (v_1, v_2)
- $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j}$,
  $\vec{w}$ avec composantes (w_1, w_2)

Opérations avec composantes

$$\begin{aligned}
\vec{v} + \vec{w} &= (v_1 + w_1)\vec{i} + (v_2 + w_2)\vec{j} \\
\alpha\vec{v} &= \alpha v_1\vec{i} + \alpha v_2\vec{j}
\end{aligned}$$

Composantes, module et direction

- Considérons le vecteur $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$,
  $\vec{v}$ avec composantes (v_1, v_2)
- L'angle entre le vecteur et l'axe X est θ

Module et direction

$$
\begin{aligned}
|\vec{v}| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\
\tan\theta &= \frac{v_2}{v_1}
\end{aligned}
$$

Exemple

- Etant donné

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \qquad \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

- On voit que

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5, \qquad |\vec{w}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$2\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j}, \qquad -3\vec{w} = -6\vec{i} + 9\vec{j}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = 5\vec{i} + \vec{j}, \qquad 4\vec{v} - 5\vec{w} = 2\vec{i} + 31\vec{j}$$

Normalisation d'un vecteur

- Soit

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$$

- Alors

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+16} = 5$$

Vecteur normalisé de $\vec{v}$

$$\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{3}{5}\vec{i} + \frac{4}{5}\vec{j}$$

Application pratique

- Considérons les points $A(2,3)$ et $B(6,2)$
- Vecteur libre $\vec{b}$, correspond avec $\vec{OB}$, composantes $(6,2)$, vecteur libre $\vec{a}$, correspond avec $\vec{OA}$ composantes $(2,3)$
- Vecteur libre $\vec{v}$, correspond avec $\vec{AB}$,

$$\vec{b} = \vec{a} + \vec{v}$$

- $$\vec{v} = \vec{b} - \vec{a}$$

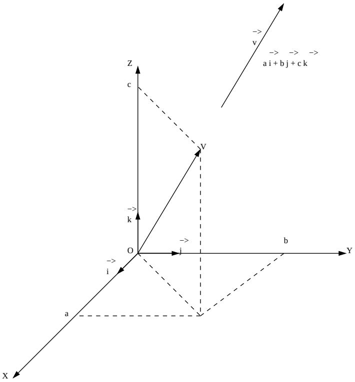
- $\vec{v}$ composantes $(4,-1)$,

$$\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j}$$

Composantes d’un vecteur dans l’espace à trois dimensions

- Choisissons dans l’espace un point de référence O
- Fixons trois axes (mutuellement perpendiculaires) à travers O
  axe X
  axe Y
  axe Z
- Repère direct
  (X est le pouce, Y l’index, Z le majeur d’une main droite)
- On obtient alors un système de coordonnées $Oxyz$:
  chaque point V dans l’espace correspond avec trois nombres réels, les coordonnées (x, y, z)

Composantes d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions



Composantes d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions

- Considérons le vecteur libre $\vec{v}$ dans l'espace
- Choisissons le représentant de $\vec{v}$ avec point initial O, vecteur lié $\vec{OV}$
- Point final V détermine le vecteur $\vec{v}$

Definition - Composantes

Les *composantes* du vecteur libre $\vec{v}$ dans l'espace sont les coordonnées (a, b, c) du point final V du représentant $\vec{OV}$ de ce vecteur libre.

Composantes d'un vecteur dans l'espace à trois dimensions

- Vecteur avec composantes $(1, 0, 0)$ est dénoté par $\vec{i}$
- Vecteur avec composantes $(0, 1, 0)$ est dénoté par $\vec{j}$
- Vecteur avec composantes $(0, 0, 1)$ est dénoté par $\vec{k}$
- Le vecteur v avec composantes (a, b, c) correspond alors à une somme
$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Opérations avec les composantes

- Etant donné deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et un scalaire α
- $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$,
  $\vec{v}$ a composantes (v_1, v_2, v_3)
- $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$,
  $\vec{w}$ a composantes (w_1, w_2, w_3)

Opérations et composantes

$$\begin{aligned} \vec{v} + \vec{w} &= (v_1 + w_1)\vec{i} + (v_2 + w_2)\vec{j} + (v_3 + w_3)\vec{k} \\ \alpha\vec{v} &= \alpha v_1\vec{i} + \alpha v_2\vec{j} + \alpha v_3\vec{k} \end{aligned}$$

- Soit $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$,
  $\vec{v}$ a composantes (v_1, v_2, v_3)

Module

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Exemple

- Soient

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \qquad \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

- Alors

$$|\vec{v}| = \sqrt{9+16+25} = \sqrt{50}, \qquad |\vec{w}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

$$2\vec{v} = 6\vec{i} + 8\vec{j} + 10\vec{k}, \qquad -3\vec{w} = -6\vec{i} + 9\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = 5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}, \qquad 4\vec{v} - 5\vec{w} = 2\vec{i} + 31\vec{j} + 10\vec{k}$$

Normalisation d'un vecteur

- Soit

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$$

- Alors

$$|\vec{v}| = \sqrt{9 + 16 + 25} = \sqrt{50}$$

Vecteur normalisé de $\vec{v}$

$$\frac{1}{|\vec{v}|}\vec{v} = \frac{3}{\sqrt{50}}\vec{i} + \frac{4}{\sqrt{50}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{50}}\vec{k}$$

Application pratique

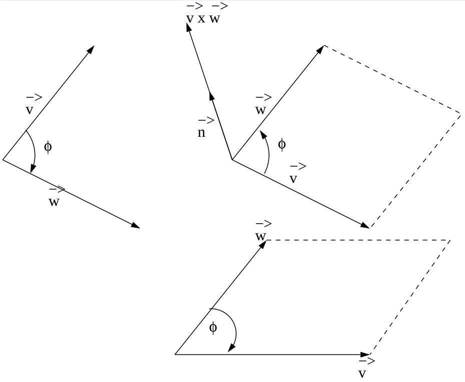
- Considérons deux points $A(2,3,4)$ et $B(5,4,3)$
- Le vecteur libre $\vec{v}$, représenté par $\vec{AB}$,
- $\vec{v}$ a composantes $(3,1,-1)$,

$$\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

Produit scalaire

Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le nombre réel (scalaire)

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos\phi$$



Produit scalaire - exemple

$$\vec{i} \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

Produit scalaire - propriétés

- Commutatif : $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
  $(\cos\phi = \cos(-\phi))$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|^2$
  $(\cos 0 = 1)$
- $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ si
  $\vec{v} = \vec{o}$ ou $\vec{w} = \vec{o}$ ou
  $\vec{v} \perp \vec{w}$ $(\cos\phi = 0)$
- Distributif par rapport à la somme de vecteurs
  $\vec{v} \cdot (\vec{w}_1 + \vec{w}_2) = \vec{v} \cdot \vec{w}_1 + \vec{v} \cdot \vec{w}_2$
- $\vec{v} \cdot (\alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{v} \cdot \vec{w})$

Produit scalaire et composantes (plan)

- $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$
- $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}, \quad \vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j}$
- $$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + v_1 w_2 \vec{i} \cdot \vec{j} + v_2 w_1 \vec{j} \cdot \vec{i} + v_2 w_2 \vec{j} \cdot \vec{j} = v_1 w_1 + v_2 w_2$$

Exemple

- Soient

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \qquad \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$

- Alors

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) = 6 - 12 = -6$$

Exemple

- Soient

$$\vec{v} = \vec{i}, \qquad \vec{w} = \vec{i} + \vec{j}$$

- Alors

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 1$$

Produit scalaire et composantes (espace)

- $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
- $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$
- $\vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{i} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0$
- $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}, \quad \vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$
- $$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 \vec{i} \cdot \vec{i} + v_2 w_2 \vec{j} \cdot \vec{j} + v_3 w_3 \vec{k} \cdot \vec{k} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Exemple

- Soient

$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \qquad \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$$

- Alors

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 2 = 6 - 12 + 10 = 4$$

- $$\vec{V} \cdot \vec{W} = |\vec{V}| \cdot |\vec{W}| \cos \phi$$

- $$\cos \phi = \frac{\vec{V} \cdot \vec{W}}{|\vec{V}| \cdot |\vec{W}|}$$

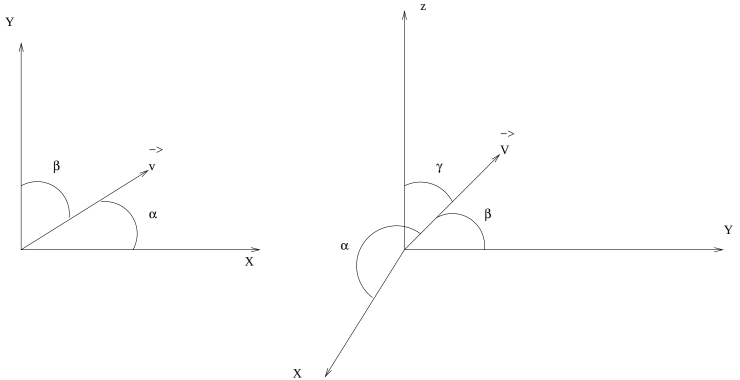
Angle entre deux vecteurs - exemple

- $$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$$

- $$\cos\phi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 2 + 3\cdot 4}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+16}} = \frac{14}{\sqrt{200}}$$

- $$\phi = 0,14\text{rad}$$

Cosinus directeurs



Cosinus directeurs

- $$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$$
- Déterminez les cosinus des angles entre le vecteur $\vec{v}$ et les axes du repère
- $$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$
- $$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$$
- $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$$

Cosinus directeurs

- $$\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$$
- Déterminez les cosinus des angles entre le vecteur $\vec{v}$ et les axes du repère
- $$\cos\alpha = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{i}|} = \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$
- $$\cos\beta = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{j}|} = \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$
- $$\cos\gamma = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}}$$
- $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

- Considérons deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$
- Décomposition du vecteur $\vec{v}$ en un e somme de deux vecteurs,

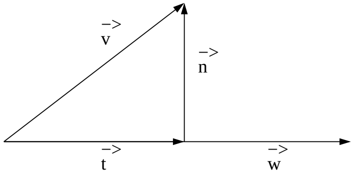
$$\vec{v} = \vec{t} + \vec{n}$$

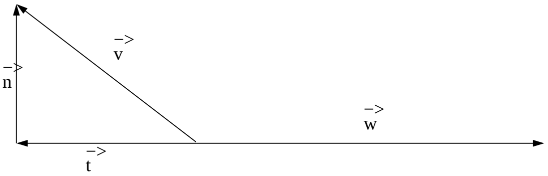
- $$\vec{t} \parallel \vec{w}, \quad \vec{n} \perp \vec{w}$$

Definition - Projection vectorielle

Le vecteur $\vec{t}$ est appelé la *projection vectorielle* de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$.

Projection vectorielle





Projection scalaire

- Considérons deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$
- La projection vectorielle $\vec{t}$ de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$

Definition - projection scalaire

La *projection scalaire* de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$ est donnée par
$|\vec{t}|$ si $\vec{w}$ et $\vec{t}$ ont le même sens
$-|\vec{t}|$ si $\vec{w}$ et $\vec{t}$ ont des sens opposés

Calcul de la projection scalaire

- ϕ aigu, $\vec{t}$ et $\vec{w}$ même sens :

$$|\vec{t}| = |\vec{v}| \cos \phi$$

- ϕ obtu, $\vec{t}$ et $\vec{w}$ sens opposés :

$$-|\vec{t}| = |\vec{v}| \cos \phi$$

- Projection scalaire de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$:

$$|\vec{v}| \cos \phi$$

- Produit scalaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \phi$$

- Projection scalaire de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$:

$$|\vec{v}| \cos \phi = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} = \vec{v} \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|}$$

Calcul de la projection vectorielle

- Vecteur dans la direction de $\vec{w}$
- Même sens si projection scalaire est positive,
  sens opposé si la projection scalaire est négative
- Module est la valeur absolue de la projection scalaire
- Projection vectorielle est un multiple d'un vecteur unitaire dans la direction et sens de $\vec{w}$,
  projection scalaire est le facteur
- $$\vec{t} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|} \left(\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} \right) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2} \vec{w}$$

Exemple

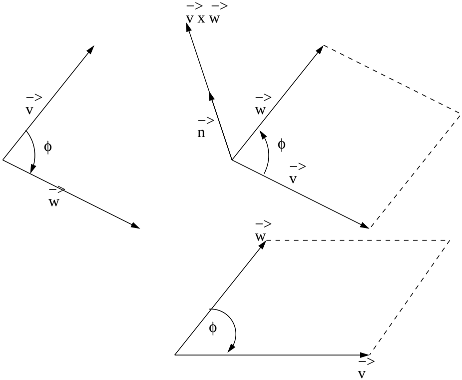
- Soient
$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}, \qquad \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$$
- Projection scalaire de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$:
$$\vec{v} \cdot \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{-6}{\sqrt{13}}$$
- Projection scalaire de $\vec{w}$ sur $\vec{v}$:
$$\vec{w} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-6}{5}$$
- Projection vectorielle de $\vec{v}$ sur $\vec{w}$:
$$\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{w}|^2}\vec{w} = \frac{-6}{13}(2\vec{i} - 3\vec{j}) = \frac{-12}{13}\vec{i} + \frac{18}{13}\vec{j}$$

- Considérons deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ dans l'espace à trois dimensions.
- On construit un troisième vecteur $\vec{v} \times \vec{w}$, le *produit vectoriel*
- Module / longueur

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\sin\phi|$$

- Direction perpendiculaire au plan formé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$
- Sens tel que $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{v} \times \vec{w}$ forment un repère direct (main droite)

Produit vectoriel



- Signification géométrique :

$$|\vec{v} \times \vec{w}| = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot |\sin \phi|$$

aire du parallélogramme formé par $\vec{v}$ et $\vec{w}$

- Exemple :

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \qquad 2\vec{i} \times 3\vec{k} = -6\vec{j}$$

- Exemple :

$$\vec{i} \times (\vec{i} + \vec{j}) = (1 \cdot \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\pi}{4})\vec{k} = \vec{k}$$

Produit vectoriel - propriétés

- $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
- $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{o}$ si
  $\vec{v} = \vec{o}$ ou $\vec{w} = \vec{o}$ ou
  $\vec{v} \parallel \vec{w} \quad (\sin\phi = 0)$
- Distributif par rapport à la somme
  $\vec{v} \times (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v} \times \vec{w_1} + \vec{v} \times \vec{w_2}$
- $\vec{v} \times (\alpha\vec{w}) = \alpha(\vec{v} \times \vec{w})$

Produit vectoriel et composantes

- $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$
- $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$
- $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}, \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}, \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$
- $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}, \vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$

Produit vectoriel et composantes

$$
\begin{aligned}
\vec{v} \times \vec{w} &= v_1 w_1 \vec{i} \times \vec{i} + v_1 w_2 \vec{i} \times \vec{j} + v_1 w_3 \vec{i} \times \vec{k} \\
&\quad + v_2 w_1 \vec{j} \times \vec{i} + v_2 w_2 \vec{j} \times \vec{j} + v_2 w_3 \vec{j} \times \vec{k} \\
&\quad + v_3 w_1 \vec{k} \times \vec{i} + v_3 w_2 \vec{k} \times \vec{j} + v_3 w_3 \vec{k} \times \vec{k} \\
&= (v_2 w_3 - v_3 w_2)\vec{i} + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\vec{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\vec{k}
\end{aligned}
$$

Produit vectoriel et composantes

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

▸ Déterminant ?

Exemple

- Soient
$$\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{w} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}$$
- $$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$
- $$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{w} &= \vec{i} \cdot 4 \cdot (-1) + \vec{j} \cdot 5 \cdot 2 + \vec{k} \cdot 3 \cdot (-3) \\ &\quad -\vec{k} \cdot 4 \cdot 2 - \vec{j} \cdot 3 \cdot (-1) - \vec{i} \cdot 5 \cdot (-3) \\ &= 11\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k} \end{aligned}$$

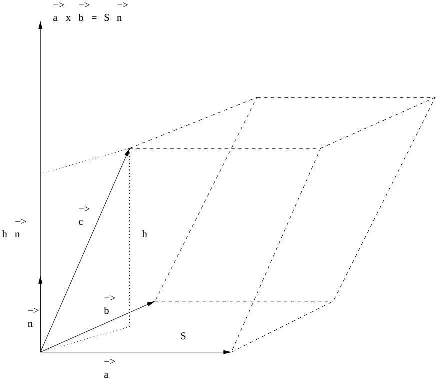
- Considérons trois vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ dans l'espace à trois dimensions

Definition - Produit triple

Le *produit triple* de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ est le scalaire

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

Produit triple



Produit triple

- Signification géométrique :
  S est l'aire du parallélogramme
  h hauteur du parallélépipède (au signe près)
  $S \cdot h$ volume du parallélépipède
- Valeur absolue du produit triple correspond au volume du parallélépipède formé par $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

Produit triple et composantes

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Exemple

- Soient

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k}, \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k},$$

-

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 10 - 9 - 8 + 15 + 3 = 7$$

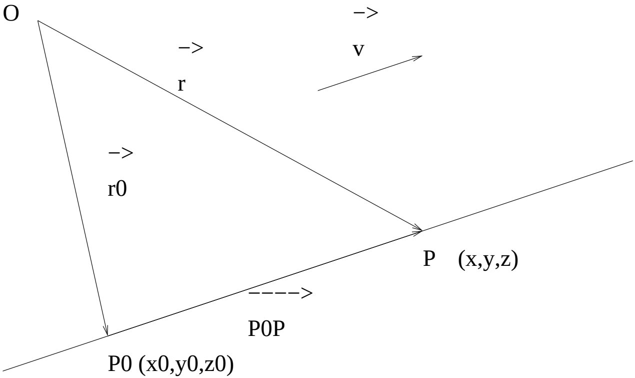
Outline

Equation d'une droite

- Equation d'une droite = condition(s) sur les coordonnées d'un point (dans l'espace), satisfaites par les points qui appartiennent à la droite
- Considérons un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur directeur

$$\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Equation d'une droite



Equation d'une droite

- P appartient à la droite quand $\vec{P_0P} \parallel \vec{v}$
- $\vec{P_0P} = k\vec{v}$, k nombre réel arbitraire
- $\vec{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$
- $\vec{r} = \vec{r}_0 + k\vec{v}$
- $\vec{r}$ et $\vec{OP}$ composantes (x, y, z)
- $\vec{r}_0 + k\vec{v}$ composantes $(x_0 + ka, y_0 + kb, z_0 + kc)$

- P appartient à la droite s'il existe un nombre réel k tel que

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ka \\ y &= y_0 + kb \\ z &= z_0 + kc \end{aligned}$$

Equation d'une droite

- Eliminer le paramètre k de l'équation paramétrique
- $a, b, c \neq 0$

$$(k =)\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

- $a = 0,\ b, c \neq 0$

$$(k =)\frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}, \qquad x = x_0$$

- $a = b = 0,\ c \neq 0$

$$x = x_0, \qquad y = y_0$$

Equation d'une droite - exemple

- Soient
$$P_0(1,1,1), \quad \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$
- Equation de la droite à travers le point P_0, vecteur directeur $\vec{v}$
$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$
- Equation paramétrique de la droite à travers le point P_0, vecteur directeur $\vec{v}$
$$\begin{aligned} x &= 1+k \\ y &= 1+2k \\ z &= 1+3k \end{aligned}$$
- $P(3,5,7)$ appartient à la droite ($k=2$), $Q(0,1,2)$ n'appartient pas à la droite

- Soient
$$P_0(1,2,3), \quad \vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$$
- Equation de la droite à travers le point P_0, vecteur directeur $\vec{v}$
$$x = 1, \qquad y - 2 = z - 3$$
$$x = 1, \qquad y - z = -1$$
- $P(1,3,4)$ appartient à la droite, $Q(0,1,2)$ n'appartent pas à la droite

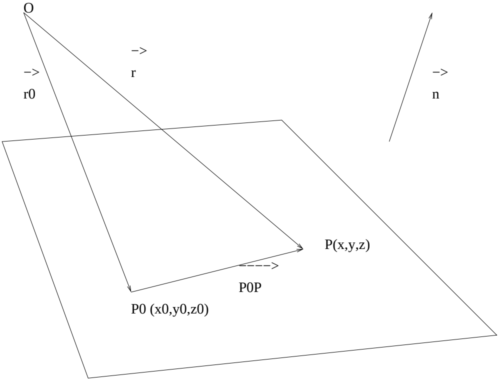
Equation d'une droite - exemple

- Soient
$$P_0(1,2,3), \quad P_1(3,2,1)$$
- La droite à travers les points P_0 et P_1 a vecteur directeur $\vec{P_0P_1} = \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$
- Equation
$$y = 2, \qquad \frac{x-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$$
$$y = 2 \qquad x + z = 4$$
- $P(2,2,2)$ appartient à la droite, $Q(0,2,0)$ n'appartient pas à la droite

- Equation d'un plan = condition satisfaite par les coordonnées d'un point appartenant au plan
- Considérons un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et un vecteur normal

$$\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

Equation d’un plan



Equation d'un plan

- P appartient au plan si $\vec{P_0P} \perp \vec{n}$
- $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$
- $\vec{P_0P} = \vec{r} - \vec{r}_0$
- $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$
- $\vec{r}$ et $\vec{OP}$ composantes (x, y, z)
- $\vec{r}_0$ composantes (x_0, y_0, z_0)

Equation d'un plan

- $P(x, y, z)$ appartient au plan si $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_0 \cdot \vec{n}$
- $$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Equation d'un plan

- Plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n}$ a une équation de la forme

$$ax + by + cz = d$$

- Différents choix pour la valeur de d donnent des plans parallèles (perpendiculaires au vecteur $\vec{n}$)
- $P_0(x_0, y_0, z_0)$ appartient au plan si

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Equation d'un plan - exemple

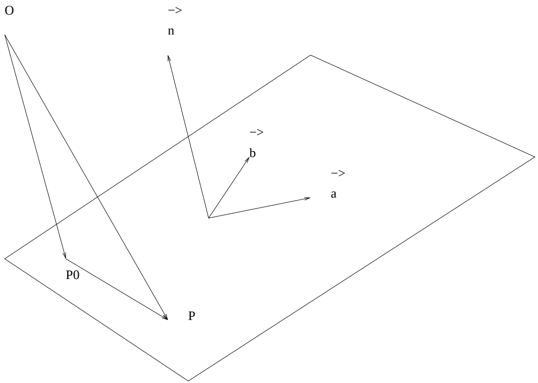
- Soient
$$P_0(1,1,1), \quad \vec{n} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$$
- Equations des plans perpendiculaires au vecteur $\vec{n}$
$$x + 2y + 3z = d$$
- Si P_0 appartient au plan,
$$d = 1 + 2 + 3 = 6$$
- Equation du plan est donc
$$x + 2y + 3z = 6$$
- $P(4,1,0)$ appartient au plan, $Q(0,0,0)$ n'appartient pas au plan

- Considérons un point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs directeurs

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}, \quad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

- On peut construire l'équation du plan si on connaît un vecteur normal $\vec{n}$

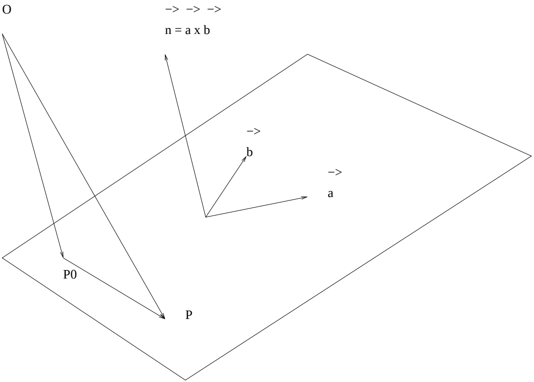
- On peut construire l'équation du plan si on connaît un vecteur normal $\vec{n}$
- Suggestions ? ? ?



Equation d'un plan

- Un choix possible pour $\vec{n}$ est

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$



Equation d'un plan

- $P(x, y, z)$ appartient au plan si $\vec{P_0P} \perp \vec{n}$
- $\vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$
  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$
- $\vec{P_0P} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$
  (produit triple)
- $\vec{P_0P}$ et $\vec{r} - \vec{r}_0$ composantes $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$
- $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Determinant ?

Equation d'un plan - Exemple

- Soient

$$P_0(1,1,1), \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

- $\vec{n}$ perpendiculaire au plan

$$\vec{a} \times \vec{b} = -4\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$$

- Plans perpendiculaires sur $\vec{n}$ ont une équation de la forme

$$-4x + 8y - 4z = d$$

- Si P_0 appartient au plan

$$d = -4 + 8 - 4 = 0$$

- Equation du plan est donc

$$-4x + 8y - 4z = 0$$

- $P(0,0,0)$ appartient au plan, $Q(1,0,0)$ n'appartient pas au plan

Equation d'un plan - Exemple

- Soient

$$P_0(1,1,1), \quad \vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

- Equation du plan est donnée par

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

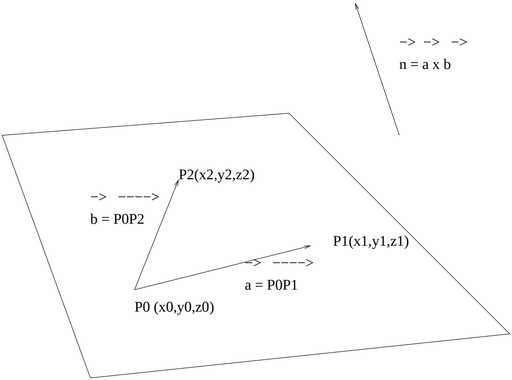
$$-4x + 8y - 4z = 0$$

$$x - 2y + z = 0$$

Equation d'un plan

Trois points

- On détermine alors deux vecteurs directeurs



- Soient $P_0(1,1,1)$, $P_1(1,2,3)$ et $P_2(2,1,0)$
- $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1}$ composantes $(0,1,2)$,
  $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2}$ composantes $(1,0,-1)$
  sont deux vecteurs directeurs
- $$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$
- Equation du plan
  $$-x + 2y - z = 0$$
- $$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$
  $$x - 2y + z = 0$$

Outline

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ & \ddots & \\ D & E & F \\ & & \ddots \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

$$AEI$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} & A & \color{green}{B} & C & \\ & & & \color{green}{\ddots} & \\ & D & E & \color{green}{F} & \\ \color{green}{\ddots} & & & & \color{green}{\ddots} \\ & \color{green}{G} & H & I & \end{vmatrix}$$

$$AEI + \color{green}{BFG}$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

$$AEI + BFG + CDH$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ & & \\ D & E & F \\ & & \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

$$AEI + BFG + CDH - CEG$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & {\color{red}B} & C \\ {\color{red}D} & E & F \\ G & H & {\color{red}I} \end{vmatrix}$$

$$AEI + BFG + CDH - CEG {\color{red}- BDI}$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

$$AEI + BFG + CDH - CEG - BDI - AFH$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = AEI + BFG + CDH - CEG - BDI - AFH$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \\ 2 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 36 + 16 - 10 - 72 - 16 = -26$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

Determinant berekenen

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} A & B & C & A & B \\ D & E & F & D & E \\ G & H & I & G & H \end{matrix}$$

Determinant berekenen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A & & B & & C & & A & & B \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \\
D & & E & & F & & D & & E \\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
G & & H & & I & & G & & H
\end{array}
$$

Determinant berekenen

$$
\begin{array}{ccccccccc}
A & & B & & C & & A & & B \\
 & \ddots & & \ddots & & \ddots & & & \\
D & & E & & F & & D & & E \\
 & & & \ddots & & \ddots & & \ddots & \\
G & & H & & I & & G & & H
\end{array}
$$

$$AEI + BFG + CDH$$

Determinant berekenen

$$AEI + BFG + CDH$$

$$\begin{matrix} A & B & C & A & B \\ D & E & F & D & E \\ G & H & I & G & H \end{matrix}$$

Determinant berekenen

$$AEI + BFG + CDH$$

$$\begin{array}{ccccc}
A & B & C & A & B \\
D & E & F & D & E \\
G & H & I & G & H
\end{array}$$

$$-(CEG + AFH + BDI)$$

Determinant berekenen

$$AEI + BFG + CDH$$

$$-(CEG + AFH + BDI)$$

$$(AEI + BFG + CDH) - (CEG + AFH + BDI)$$