HOGERE ZEEVAARTSCHOOL ANTWERPEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
VAKGROEP TOEGEPASTE EN EXACTE WETENSCHAPPEN

VECTORREKENING

PETER BUEKEN

HZS-OE5-NW142
Eerste jaar Bachelor Nautische Wetenschappen
Versie 14.0
31 oktober 2014

Inhoudstafel

Hoofdstuk 1

Vectorrekening

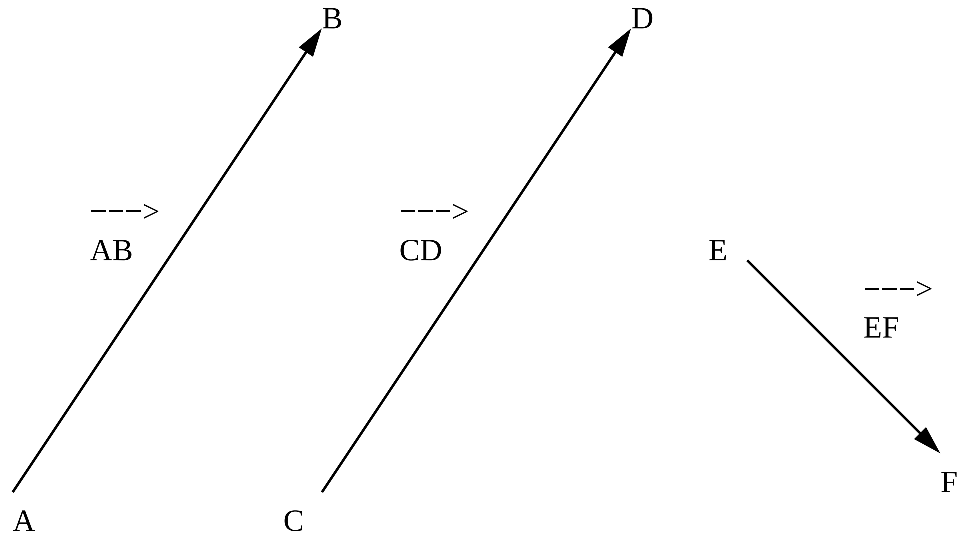
1. Inleiding

Voor het beschrijven van bepaalde verschijnselen uit o.a. de mechanica en de fysica kan men niet volstaan met het gebruik van *scalaire* grootheden (die voorgesteld worden door een reëel getal en een eenheid, zoals bijvoorbeeld afstand, temperatuur, druk) maar hebben we *vectoriële* grootheden nodig. Dit zijn grootheden die niet alleen een *grootte* hebben, maar waaraan ook een *richting* en een *zin* (en eventueel een *aangrijpingspunt*) geassocieërd wordt. Voorbeelden van vectoriële grootheden zijn de snelheid en versnelling van een puntmassa, de kracht die uitgeoefend wordt op een massa, een verplaatsing die een voorwerp uitvoert.

2. Vectoren in het vlak en de drie-dimensionale ruimte

1. Definities

Een *(gebonden) vector* in het vlak of de drie-dimensionale ruimte bestaat uit twee punten A en B uit deze ruimte, in een bepaalde volgorde. Een gebonden vector komt met andere woorden overeen met een koppel punten (A, B) uit de beschouwde ruimte. We noemen A en B respectievelijk het beginpunt (of aangrijpingspunt) en het eindpunt van de gebonden vector, en we noteren deze vector als $\vec{AB}$. We stellen de vector $\vec{AB}$ grafisch voor als een pijl met beginpunt A en eindpunt B.



Figuur 1. *Enkele gebonden vectoren*

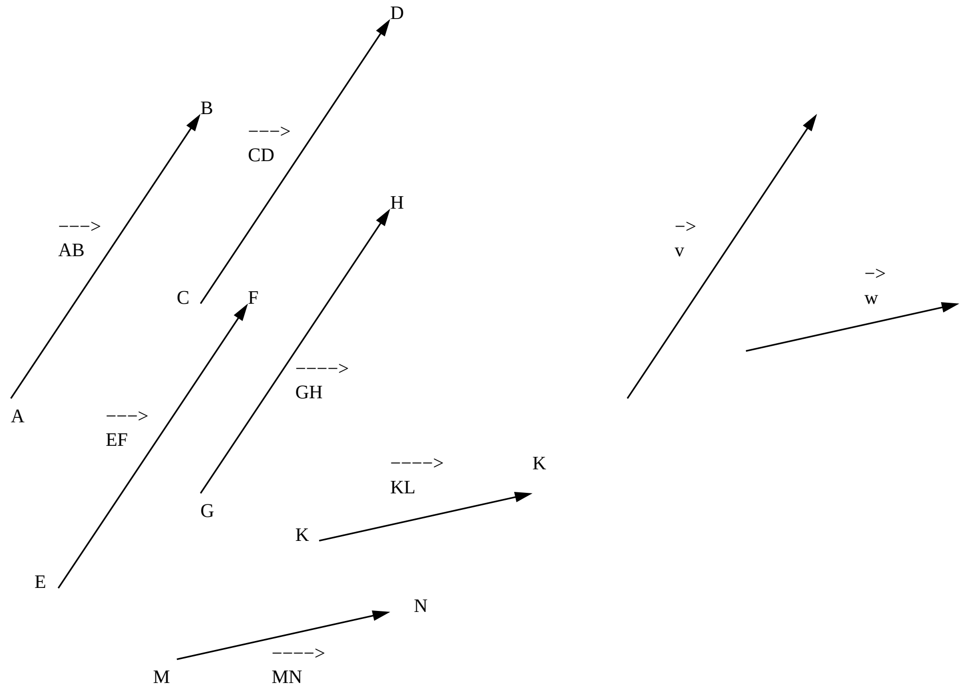
Bij gebonden vectoren spelen het beginpunt en het eindpunt van de vector een belangrijke rol. We beschouwen twee gebonden vectoren $\vec{AB}$ en $\vec{CD}$ als verschillend wanneer hun begin- of eindpunten verschillen, dus

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow A = C \text{ en } B = D.$$

In sommige toepassingen is het aangrijpingspunt van een vector echter niet belangrijk, maar wordt de vector slechts gebruikt om een grootheid met een richting, zin en grootte uit te drukken. Gebonden vectoren met dezelfde zin, richting en grootte maar een verschillend beginpunt worden dan als verschillende voorstellingen van dezelfde vectoriële grootheid beschouwd. We spreken in dat geval van een *(vrije) vector*. Twee gebonden vectoren $\vec{AB}$ en $\vec{CD}$ zijn vertegenwoordigers van dezelfde vrije vector als de puntenkoppels (A, B) en (C, D) "equipollent" zijn, dit wil zeggen dat er een translatie (of verschuiving) T van de ruimte bestaat die de begin- en eindpunten van de gebonden vectoren op elkaar afbeeldt, dus

$$\vec{AB} = \vec{CD} \Longleftrightarrow T(A) = C \text{ en } T(B) = D.$$

Praktisch vormen de punten A, B, C, D de hoekpunten van een parallellogram, of kunnen beide puntenkoppels verbonden worden door twee parallellogrammen (in het geval waarin de punten op dezelfde rechte gelegen zijn). Een vrije vector is met andere woorden een equivalentieklasse van equipollente puntenkoppels of van de overeenkomstige gebonden vectoren. We noteren de vrije vectoren vaak met behulp van de symbolen $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}, \vec{w}, \ldots$ In wat volgt zullen we ons voornamelijk richten op de studie van vrije vectoren, die we kortweg vectoren zullen noemen.



Figuur 2. *Vrije vectoren met enkele vertegenwoordigers*

De *modulus* $|\vec{AB}|$ van een gebonden vector $\vec{AB}$ is de afstand tussen het beginpunt A en het eindpunt B van deze vector (of de lengte van de pijl die de grafische voorstelling vormt van de vector). We definiëren de *modulus* $|\vec{v}|$ van een vrije vector $\vec{v}$ als de modulus van een willekeurige vertegenwoordiger $\vec{AB}$ van deze vrije vector.

Een *eenheidsvector* is een vector waarvan de modulus gelijk is aan 1. De *nulvector* $\vec{0}$ is de vrije vector die overeenkomt met de gebonden vectoren waarvan begin- en eindpunt samenvallen, $\vec{AA}$. Het is duidelijk dat de modulus van de nulvector gelijk is aan 0.

De *tegengestelde vector* van een gebonden vector $\vec{AB}$ is de vector $\vec{BA}$. De vrije vector die overeenkomt met de tegengestelde vector $\vec{BA}$ van een willekeurige vertegenwoordiger $\vec{AB}$ van een vrije vector $\vec{v}$ wordt de tegengestelde vector van $\vec{v}$ genoemd, en we duiden deze vector aan als $-\vec{v}$. De tegengestelde vector $-\vec{v}$ heeft dezelfde grootte en richting als $\vec{v}$, maar heeft de tegengestelde zin.

2. Scalair veelvoud van een vector

Beschouwen we een vrije vector $\vec{a}$ en een reëel getal k. Dan definiëren we het *scalair veelvoud* $k \cdot \vec{a}$ als een vector met dezelfde richting als $\vec{a}$, waarvan de modulus wordt gegeven door

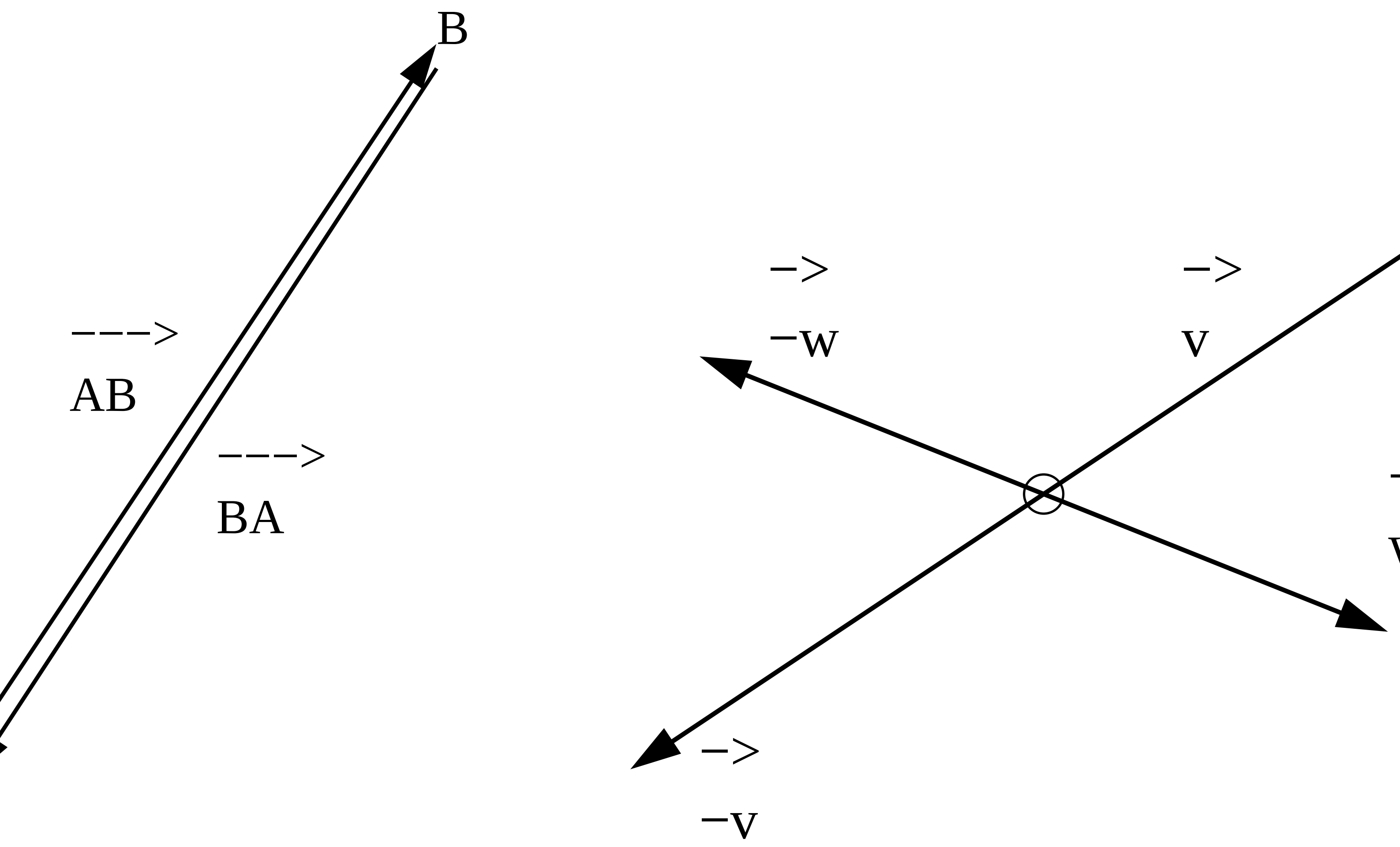
$$|k \cdot \vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

De zin van $k \cdot \vec{a}$ en $\vec{a}$ is dezelfde (resp. tegengesteld) indien k positief (resp. negatief) is.

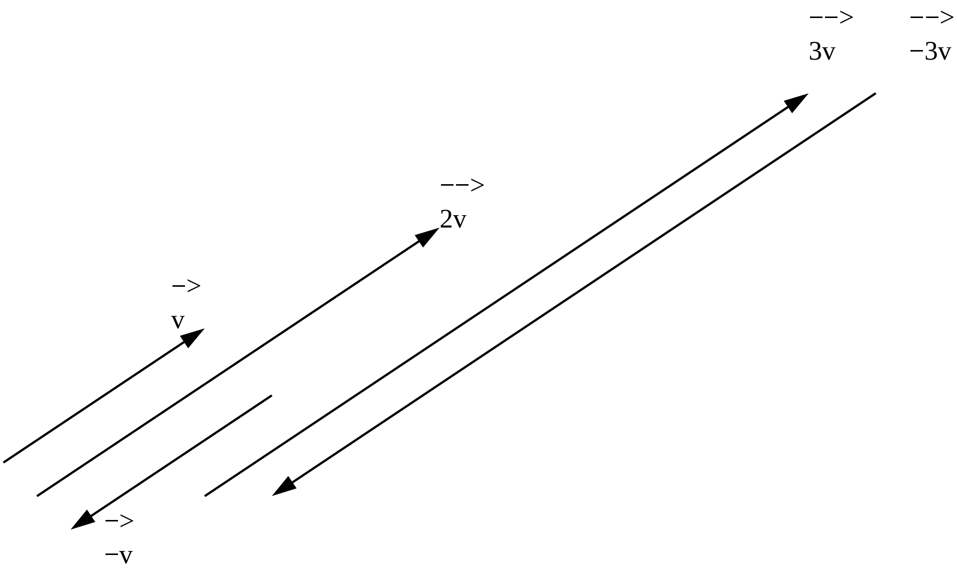
Als de vector $\vec{a}$ verschilt van de nulvector, is het eenvoudig in te zien dat de vector

$$\frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$$

een eenheidsvector is met dezelfde richting en zin als de vector $\vec{a}$. De constructie van een eenheidsvector in de richting van een gegeven vector $\vec{v}$ wordt *normaliseren* van de vector $\vec{v}$ genoemd.



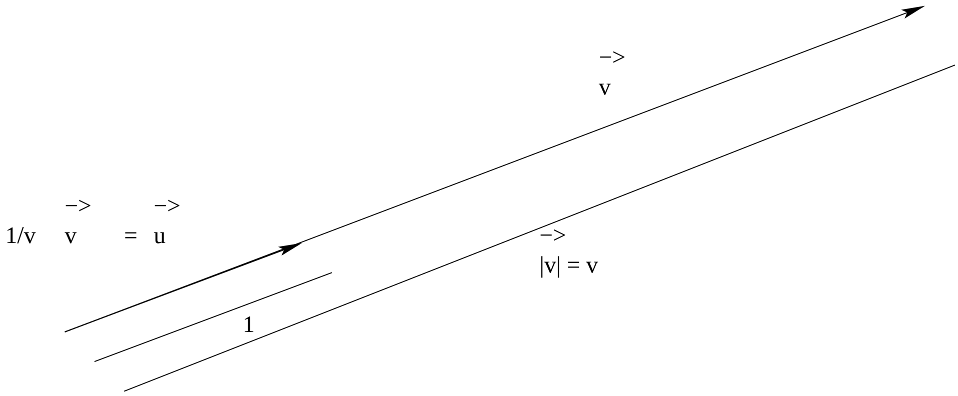
Figuur 3. *Tegengestelde vectoren*



Figuur 4. *Enkele scalaire veelvouden van een vrije vector*

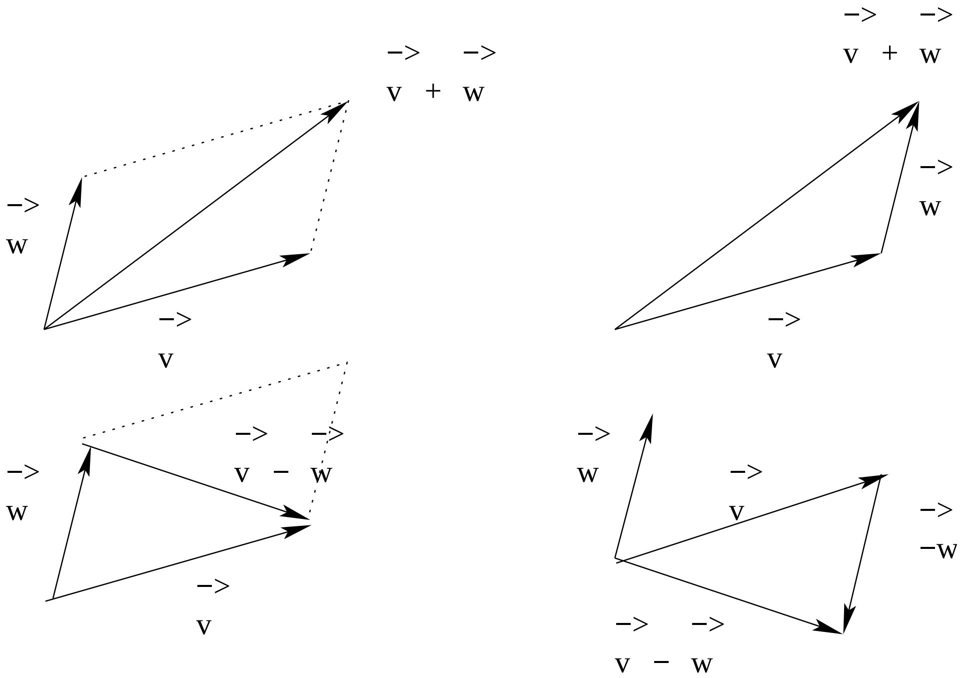
3. Som en verschil van vrije vectoren

Stel dat $\vec{a}$ en $\vec{b}$ twee vrije vectoren zijn, die respectievelijk overeenkomen met de gebonden vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{AB}$. We definiëren dan de som of de resultante $\vec{a} + \vec{b}$ van de vrije vectoren



Figuur 5. *Normaliseren van een vrije vector*

$\vec{a}$ en $\vec{b}$ als de vrije vector die overeenkomt met de gebonden vector $\vec{OB}$. Deze constructie van de som van twee vectoren wordt de "kop-aan-staart"-constructie genoemd.



Figuur 6. *Som en verschil van vrije vectoren*

Een alternatieve methode voor de constructie van de som is de "parallellogram"-methode. Als A en B de eindpunten zijn van de gebonden vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$ die de vrije vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ vertegenwoordigen, dan wordt de som $\vec{a}+\vec{b}$ van deze vectoren vertegenwoordigd door een gebonden vector $\vec{OC}$, waarbij C het vierde hoekpunt is van het parallellogram met hoekpunten O, A en B.

Het verschil van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ definiëren we als de som

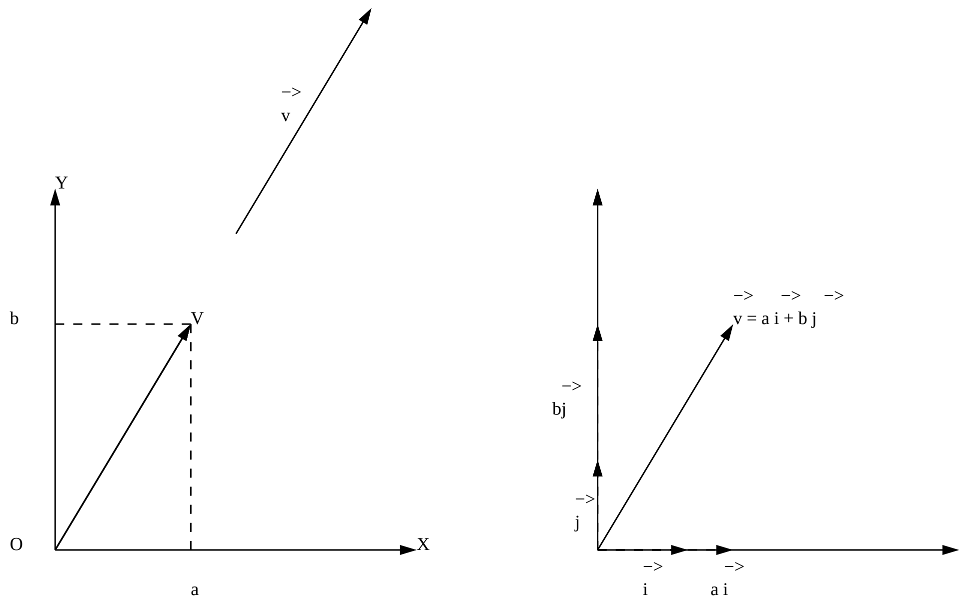
$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

van de vector $\vec{a}$ en de tegengestelde vector van $\vec{b}$.

4. Kentallen van een (vrije) vector

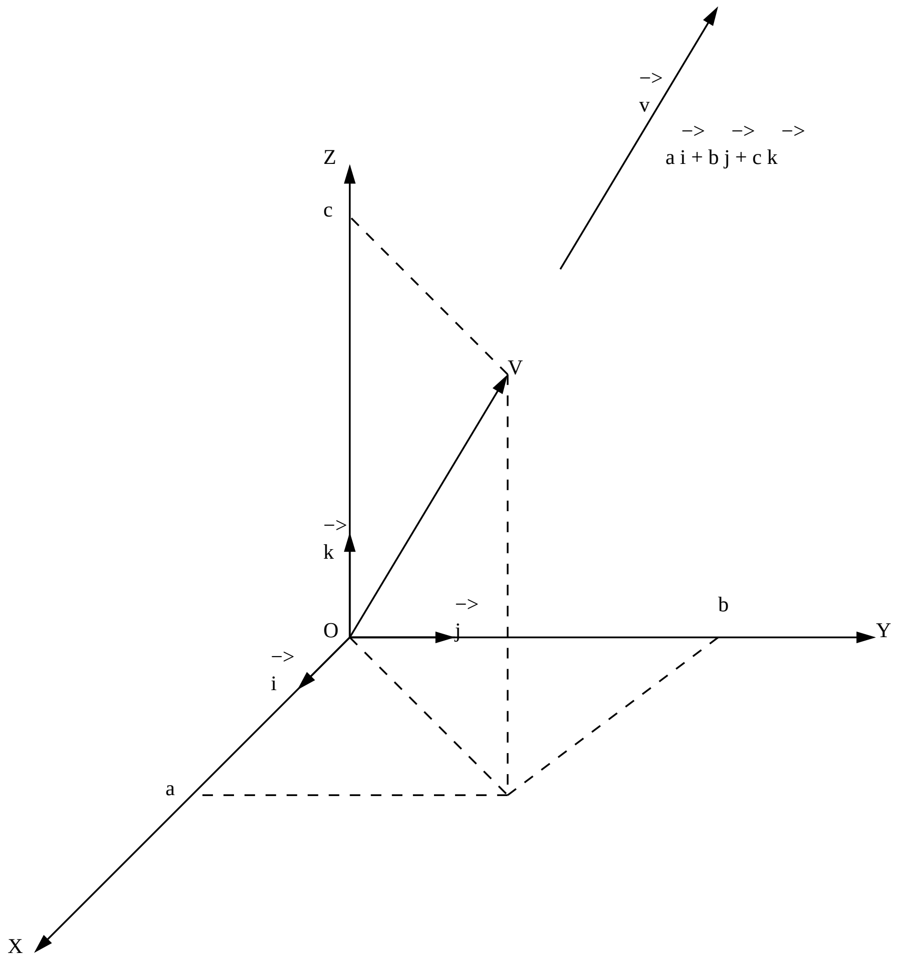
Door voor elke vrije vector een vertegenwoordiger te kiezen met beginpunt in een vast punt O, zien we dat de verzameling der vrije vectoren overeenkomt met die van de gebonden vectoren $\vec{OV}$, die op haar beurt overeenkomt met de verzameling van alle punten van onze ruimte (de eindpunten V van de vectoren $\vec{OV}$).

Beschouwen we nu de verzameling van alle vrije vectoren in de twee-dimensionale ruimte, en kiezen we in deze ruimte een coördinatenstelsel Oxy, bestaande uit twee loodrecht op elkaar staande assen x en y door het punt O, waarop we een eenheid aangeven. Elke vrije vector $\vec{v}$ komt dan overeen met het eindpunt V van de gebonden vector $\vec{OV}$. De coördinaten (v_x, v_y) van het punt V noemen we de *kentallen* of *coördinaten* van de vrije vector $\vec{v}$. We besluiten dat de vrije vectoren in het vlak kunnen voorgesteld worden als tweetallen van reële getallen, $\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y)$.



Figuur 7. *Kentallen van een vector in het vlak*

Op dezelfde manier kunnen we, voor de drie-dimensionale ruimte, een coördinatenstelsel $Oxyz$ construeren, bestaande uit drie onderling loodrechte assen x, y en z door het punt O, uitgerust met een eenheid. We zullen hierbij steeds kiezen voor een *rechtshandig* coördinatenstelsel, dit wil zeggen dat de zin van de as z zó gekozen wordt dat de drie assen x, y en z overeenkomen met de duim, wijsvinger en middenvinger van de rechterhand. Elke vrije vector $\vec{v}$ komt in dit geval overeen met een drietal reële getallen $\vec{v} \leftrightarrow (v_x, v_y, v_z)$, de coördinaten van het eindpunt V van de gebonden vector $\vec{OV}$ die een vertegenwoordiger is van $\vec{v}$. Dit drietal noemen we opnieuw de *kentallen* of *coördinaten* van de vector $\vec{v}$.



Figuur 8. *Kentallen van een vector in de drie-dimensionale ruimte*

Beschouwen we nu twee punten A en B in de twee- of drie-dimensionale ruimte, en stellen we dat de coördinaten van deze punten gegeven worden door

$$A(a_x, a_y, a_z), \qquad B(b_x, b_y, b_z).$$

Het is dan eenvoudig in te zien dat de kentallen van de vrije vector $\vec{v} = \vec{OB} - \vec{OA}$, die vertegenwoordigd wordt door de gebonden vector $\vec{AB}$, gegeven worden door

$$(b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z).$$

De modulus van een vector $\vec{v}$ met kentallen (v_x, v_y) wordt gegeven door

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

en de modulus van een vector met kentallen (v_x, v_y, v_z) wordt gegeven door

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

De kentallen van de nulvector zijn $(0, 0)$ of $(0, 0, 0)$.

Indien $\vec{a}$ gegeven wordt door de kentallen (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)), dan zijn de kentallen van de vector $k \cdot \vec{a}$ gelijk aan (ka_x, ka_y) (resp. (ka_x, ka_y, ka_z)). De kentallen van de vector $-\vec{a}$ tegengesteld aan de vector $\vec{a}$ met kentallen (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) worden gegeven door $(-a_x, -a_y)$ (resp. $(-a_x, -a_y, -a_z)$).

Als de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ gegeven worden door hun kentallen (a_x, a_y) (of (a_x, a_y, a_z)) en (b_x, b_y) (of (b_x, b_y, b_z)), dan wordt de som van de vectoren gegeven door de kentallen

$$(a_x + b_x, a_y + b_y) \text{ of } (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z).$$

Het verschil van deze vectoren heeft bijgevolg kentallen

$$(a_x - b_x, a_y - b_y) \text{ of } (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z).$$

In wat volgt duiden we de eenheidsvector in de richting en zin van de x-as, dit wil zeggen de vrije vector met kentallen $(1, 0)$ (of $(1, 0, 0)$ als we met vectoren in de drie-dimensionale ruimte werken), aan met het symbool $\vec{i}$. Op dezelfde manier schrijven we $\vec{j}$ voor de vrije vector met kentallen $(0, 1)$ (of $(0, 1, 0)$), dus de eenheidsvector met de richting en zin van de y-as, en duiden we met $\vec{k}$ de eenheidsvector aan die de richting en zin van de z-as heeft, en dus overeenkomt met kentallen $(0, 0, 1)$. Het is dan duidelijk dat de vector $\vec{a}$ met kentallen (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) steeds kan geschreven worden als een som

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}, \text{ resp. } \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}.$$

5. Scalair produkt

Beschouwen we twee vrije vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. We definiëren het *scalair produkt* van deze vectoren als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

waarbij φ de hoek voorstelt tussen de twee vectoren.

Het is dan duidelijk dat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a},$$

en dat

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2.$$

Verder is het eenvoudig in te zien dat $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ indien $\vec{a} = 0$ of $\vec{b} = 0$ of $\vec{a} \perp \vec{b}$. Tenslotte kan men aantonen dat

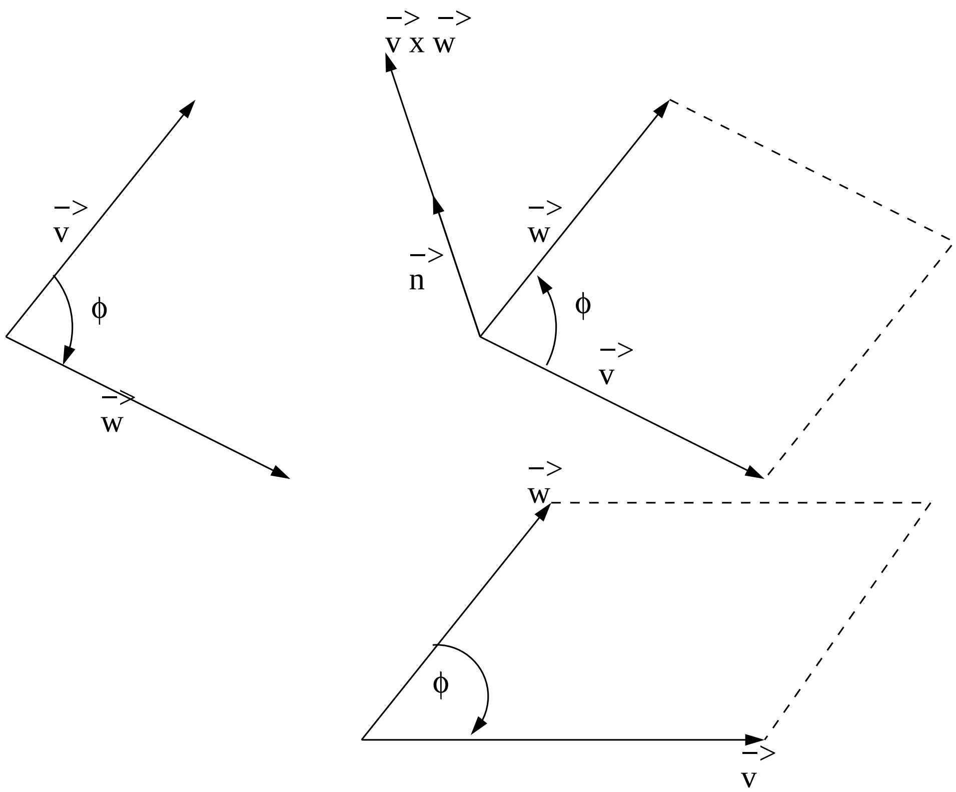
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \qquad (k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

We besluiten dat, voor de hierboven ingevoerde basisvectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ (en $\vec{k}$), geldt dat

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0;$$

Bijgevolg wordt het scalair produkt van twee vectoren met kentallen (a_x, a_y) (resp. (a_x, a_y, a_z)) en (b_x, b_y) (resp. (b_x, b_y, b_z)) gegeven door

$$a_x b_x + a_y b_y (\text{resp. } a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z).$$



Figuur 9.

Beschouwen we nu twee vrije vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. Omdat

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,$$

kunnen we de hoek φ tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ bepalen met behulp van de formule

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Beschouwen we nu een vector $\vec{a}$ in het vlak, gegeven door de kentallen (a_x, a_y). De hoek gevormd door de vector $\vec{a}$ en de (positieve) x-as wordt dan bepaald door

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}},$$

terwijl de hoek met de (positieve) y-as gegeven wordt door

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}.$$

De hoeken tussen de vector $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ in de driedimensionale ruimte en de coördinaatsassen worden gegeven door de getallen

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|},$$

die we de *richtingscosinussen* van de vector $\vec{a}$ noemen. Het is duidelijk dat

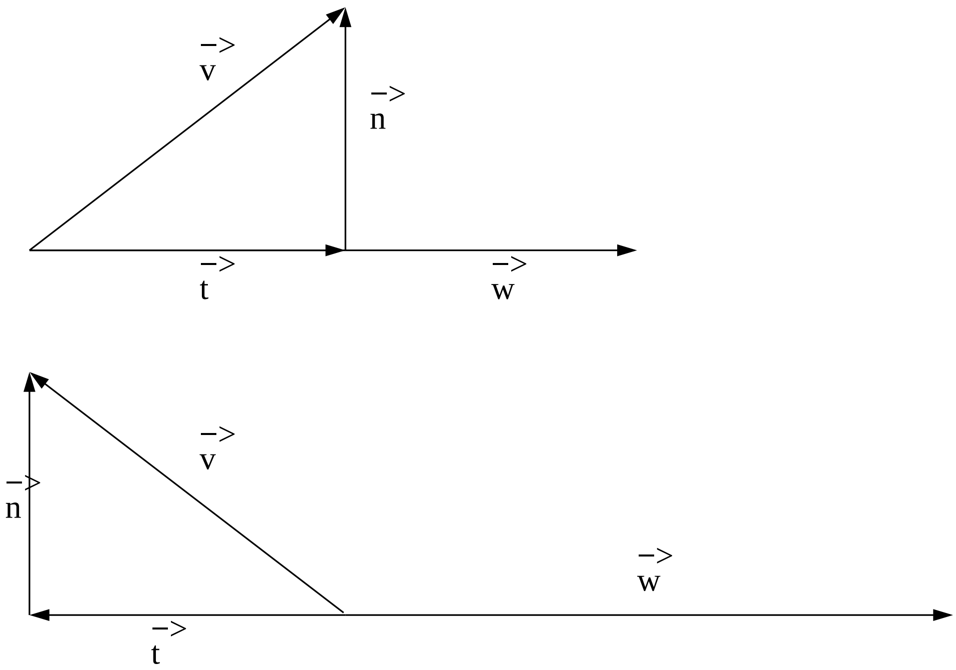
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

6. Scalaire en vectoriële projectie

Beschouwen we twee vrije vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. We kunnen de vector $\vec{a}$ loodrecht projecteren op de richting gegeven door de vector $\vec{b}$, dit wil zeggen dat we de vector $\vec{a}$ schrijven als een som

$$\vec{a} = \vec{t} + \vec{n},$$

waarbij de vector $\vec{t} = k\vec{b}$ evenwijdig is met $\vec{b}$ en $\vec{n}$ loodrecht staat op $\vec{b}$. De vector $\vec{t}$ wordt de *vectoriële projectie* van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ genoemd. De *scalaire projectie* van de vector $\vec{a}$ op de vector $\vec{b}$ wordt gedefinieerd als $k|\vec{b}|$, dus als de modulus van de vector $\vec{t}$, waaraan we een teken hechten: de scalaire projectie is positief indien $\vec{t}$ dezelfde zin heeft als $\vec{b}$, negatief indien beide vectoren een tegengestelde zin hebben.



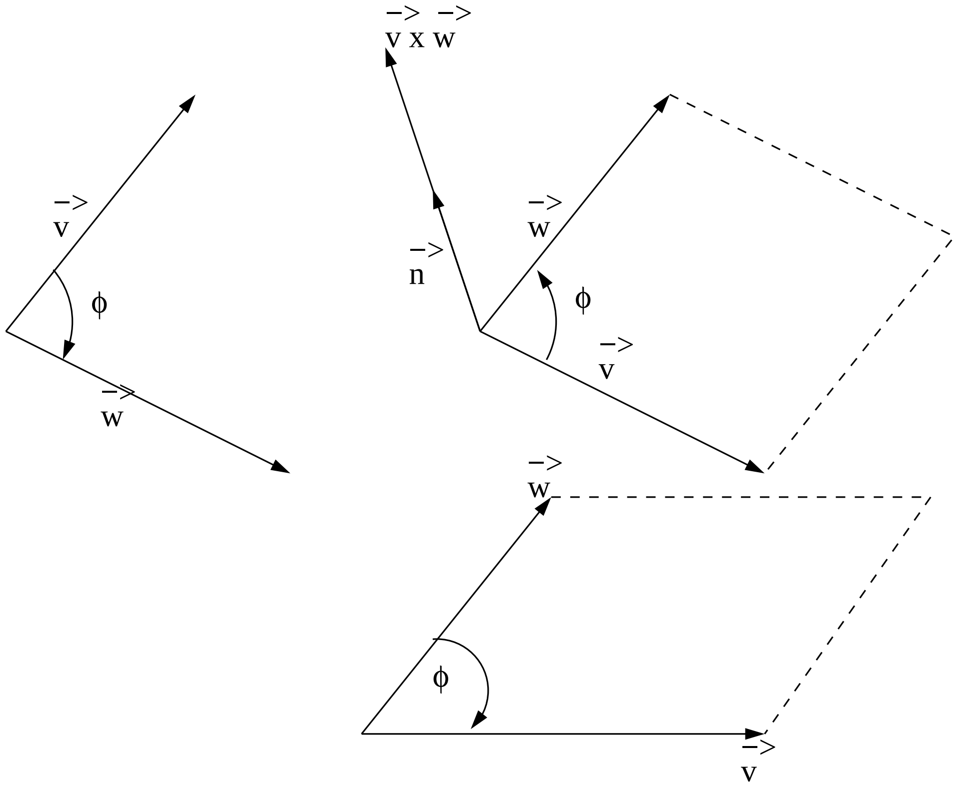
Figuur 10.

We berekenen de scalaire projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ als

$$|\vec{a}| \cos\varphi = \vec{a} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|},$$

terwijl de *vectoriële projectie* gegeven wordt door

$$\vec{t} = |\vec{a}| \cos\varphi \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \cdot \vec{b}.$$



Figuur 11.

7. Vectorprodukt en tripelprodukt

Beschouwen we twee (lineair onafhankelijke) vrije vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in de drie-dimensionale ruimte, dan kunnen we een eenheidsvector $\vec{n}$ construeren, die loodrecht staat op het vlak gevormd door $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en waarvan de zin zó gekozen is dat $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{n}$ een rechtshandig assenstelsel vormen. We definiëren dan het *vectorproduct* $\vec{a} \times \vec{b}$ als de vector

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi| \cdot \vec{n},$$

waarbij φ de hoek is tussen de vector $\vec{a}$ en de vector $\vec{b}$.

Uit de constructie volgt dat

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a},$$

terwijl

$$\vec{a} \times \vec{b} = 0$$

indien $\vec{a} = 0$ of $\vec{b} = 0$ of $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Verder is het eenvoudig in te zien dat

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin \varphi|$$

gelijk is aan de oppervlakte van het parallellogram opgespannen door de twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en kunnen we aantonen dat

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}, \qquad \vec{a} \times (k \cdot \vec{b}) = k \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

De definitie toont ons onmiddellijk dat, voor de hierboven ingevoerde basisvectoren $\vec{i}$, $\vec{j}$ en $\vec{k}$, geldt dat

$$\begin{aligned}&\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0,\\&\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\\&\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j},\end{aligned}$$

en het vectorprodukt van de vectoren met kentallen (a_x, a_y, a_z) en (b_x, b_y, b_z) wordt bijgevolg gegeven door

$$(a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

We kunnen dit produkt dan ook (formeel) uitrekenen als de determinant

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Beschouwen we nu drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$ in de driedimensionale ruimte. We definiëren dan het drievoudig produkt of tripelprodukt van deze drie vectoren als het reële getal

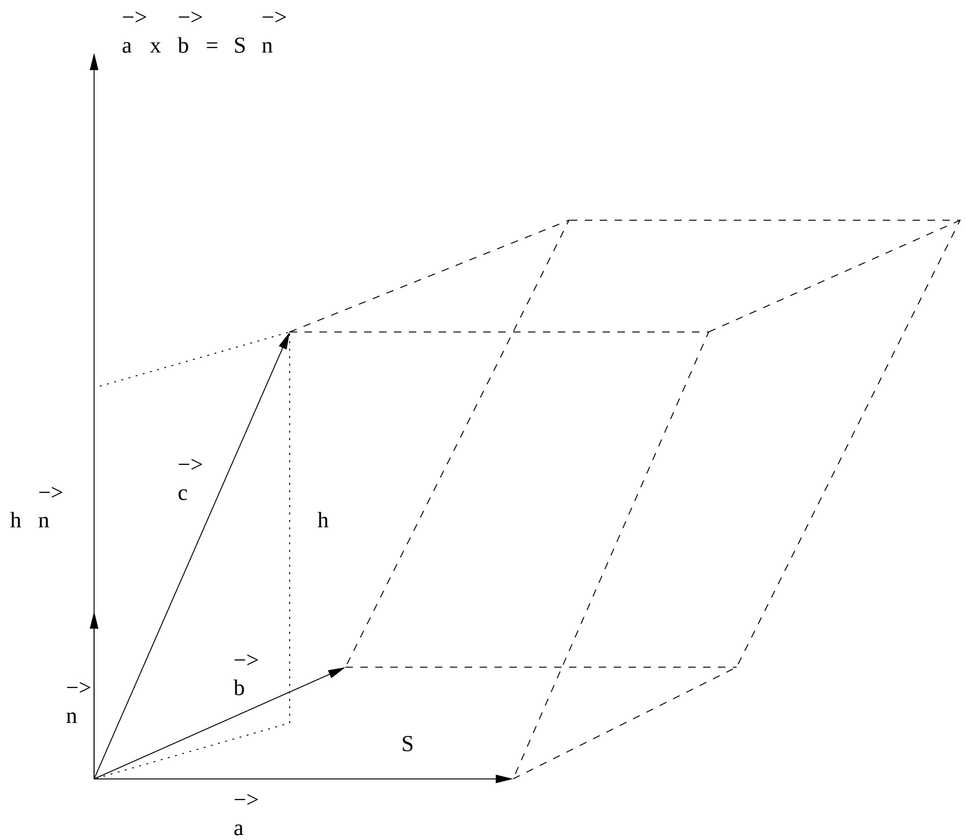
$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Een eenvoudige berekening toont aan dat, voor vectoren met kentallen (a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z) en (c_x, c_y, c_z), dit drievoudig produkt overeenkomt met de determinant

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

De absolute waarde van het drievoudig produkt is het volume van het parallellepipedum opgespannen door de drie vectoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ en $\vec{c}$, terwijl het teken van dit getal aanduidt of de vectoren een rechtshandig of een linkshandig assenstelsel vormen.

3. Vergelijkingen van rechten en vlakken



Figuur 12.

1. Vergelijking van een rechte

Een rechte in de drie-dimensionale ruimte wordt volledig bepaald door een punt P_0 (met coördinaten (x_0, y_0, z_0)) en een richting, gegeven door een (vrije) vector $\vec{a} \neq 0$ met kentallen (a, b, c). Een punt P (met coördinaten (x, y, z)) behoort tot de rechte indien de vector $\vec{P_0P}$ dezelfde richting heeft als de vector $\vec{a}$, dus

$$\vec{P_0P} = k \cdot \vec{a}, \qquad k \in \mathbb{R}.$$

De kentallen van de vector $\vec{P_0P}$ worden gegeven door $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, en we vinden bijgevolg de parametervergelijking voor de rechte,

$$\begin{cases} x = x_0 + ka, \\ y = y_0 + kb, \\ z = z_0 + kc. \end{cases}$$

Deze vergelijking geeft, voor elke reële waarde $k \in \mathbb{R}$, de coördinaten van een punt P op de rechte. Elimineren van de parameter k uit deze vergelijkingen levert ons de vergelijking voor de rechte op, dit is de voorwaarde waaraan de coördinaten van een punt P moeten voldoen om tot de rechte te behoren. Als alle kentallen van de vector $\vec{a}$ verschillen van 0, vinden we

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Wanneer één van de kentallen van $\vec{a}$ gelijk is aan nul, bijvoorbeeld $a = 0$, levert de parametervergelijking ons de vergelijking

$$x = x_0, \qquad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c},$$

twee kentallen gelijk aan nul, bijvoorbeeld $a = b = 0$, levert de vergelijking

$$x = x_0, \qquad y = y_0.$$

2. Vergelijking van een vlak

Een vlak in de drie-dimensionale ruimte wordt volledig bepaald door een punt P_0 met coördinaten (x_0, y_0, z_0) en een richting loodrecht op het vlak, die we de normale richting noemen. De normale richting wordt vastgelegd door een (vrije) vector $\vec{n} \neq 0$ met kentallen (n_1, n_2, n_3).

Een punt P behoort dan tot het vlak indien de vector $\vec{P_0P}$, die overeenkomt met een richting in het vlak, loodrecht staat op de normale richting, dus

$$\vec{P_0P} \perp \vec{n}, \qquad \vec{P_0P} \cdot \vec{n} = 0.$$

De kentallen van de vector $\vec{P_0P}$ worden gegeven door $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, en we vinden dus de vergelijking

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Deze vergelijking kan geschreven worden als

$$n_1x + n_2y + n_3z = d, \qquad d = \vec{n} \cdot \vec{OP_0} = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0.$$

We kunnen een vlak ook vastleggen met behulp van een punt P_0 en twee (verschillende) richtingen in het vlak, gegeven door lineair onafhankelijke vectoren $\vec{r_1} = (a_1, b_1, c_1)$ en $\vec{r_2} = (a_2, b_2, c_2)$. Een punt P behoort dan tot het vlak indien de vector $\vec{P_0P}$ kan geschreven worden als een combinatie van de vectoren $\vec{r_1}$ en $\vec{r_2}$,

$$\vec{P_0P} = k_1\vec{r_1} + k_2\vec{r_2}, \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

en we vinden de parametervergelijkingen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + k_1a_1 + k_2a_2, \\ y &= y_0 + k_1b_1 + k_2b_2, \\ z &= z_0 + k_1c_1 + k_2c_2, \end{aligned}$$

De vergelijking van het vlak wordt in dat geval bekomen door eliminatie van de parameters k_1 en k_2, en wordt gegeven door de vergelijking

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Opmerking. Het vectorproduct $\vec{r_1} \times \vec{r_2}$ is een vector die loodrecht staat op de twee richtingsvectoren. Bijgevolg levert dit vectorproduct ons een vector op die de normale richting op het vlak voorstelt, en kunnen we de vergelijking van het vlak vinden door te stellen dat

$$\vec{P_0P} \cdot (\vec{r_1} \times \vec{r_2}) = 0.$$

De definitie van het drievoudig product levert ons dan opnieuw de hierboven aangegeven determinantvoorwaarde als vergelijking van het vlak.