

HOGERE ZEEVAARTSCHOOL ANTWERPEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN  
VAKGROEP TOEGEPASTE EN EXACTE WETENSCHAPPEN

# DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

D. AERTS, P. BUEKEN, D. LUYCKX



# INHOUDSTAFEL

<b>Inhoudstafel</b>	<b>3</b>
<b>1 Reële functies</b>	<b>7</b>
<b>2 Limieten</b>	<b>11</b>
<b>3 Continuïteit</b>	<b>15</b>
<b>4 Afgeleiden</b>	<b>17</b>
<b>5 Toepassingen van afgeleiden</b>	<b>29</b>
<b>6 Partiële afgeleiden</b>	<b>47</b>
<b>7 Belangrijke stellingen</b>	<b>61</b>

<b>8 De formule van Taylor-MacLaurin</b>	<b>67</b>
<b>9 Complexe getallen</b>	<b>73</b>
<b>10 Onbepaalde integratie</b>	<b>85</b>
<b>11 Bepaalde integraal</b>	<b>99</b>
<b>12 Numerieke integratie</b>	<b>117</b>

---

# GEBRUIKTE SYMBOLEN

- ⊗ Dit zijn eenvoudige oefeningen, in de eerste plaats bedoeld om de nodige basistechnieken in te oefenen.
- ⊗⊗ Dit is een iets moeilijker oefening, die iets meer inzicht vraagt.
- ⊞ Oefeningen met de hoogste moeilijkheidsgraad, vergelijkbaar met examen oefeningen.
- ☆ Dit zijn examen oefeningen van de voorbije jaren.
- ▶ Deze oefeningen dien je op te lossen als voorbereiding op het labo. Je brengt je oplossing, of een neerslag van je pogingen, mee naar het labo.
- Ⓢ Deze oefeningen worden in het aangegeven labo behandeld.



# HOOFDSTUK 1

## REËLE FUNCTIES

⊗ **1.1.** Stel dat  $f(x) = \sin(x)$  en  $g(x) = x$ . Bepaal het domein van het quotiënt  $\frac{f}{g}$  van deze functies. Beschrijf de functies

$$f + g, \quad f \cdot g, \quad f \circ g, \quad g \circ f.$$

⊗ **1.2.** Zelfde vraag voor de functies  $f(x) = \cos(x)$  en  $g(x) = x^2 + 2x + 3$ .

⊗ **1.3.** Beschrijf de constructie van de volgende reële functies.

- |                              |  |
|------------------------------|--|
| 1. $y = x^2 + 3x + 4$        | 6. $y = \sin(x^3 + 3x^2) \cos(2x + 1)$ |
| 2. $y = (x + 1)(x + 2)$      | 7. $y = \sin(\log_2(x))$               |
| 3. $y = \frac{x + 1}{x + 2}$ | 8. $y = \operatorname{tg}(5^{3x+2})$   |
| 4. $y = \sqrt{x + 2^x}$      | 9. $y = x^{(x^2)}$                     |
| 5. $y = e^{x^2 \sin x}$      | 10. $x^{\log_2(x) \sin(x^2)}$          |

⊗ 1.4. Bepaal de limiet van de getallenrij.

1.  $x_n = \frac{2}{n}$

2.  $x_n = \frac{n}{n+1}$

3.  $x_n = 2 - \frac{1}{10^n}$

4.  $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

5.  $x_n = -(10^n)$

6.  $x_n = (-1)^n$

7.  $x_n = \left(-\frac{1}{10}\right)^n$

8.  $x_n = (-n)^3$



## Oplossingen - Solutions

1.1.

$$\frac{f}{g} = \frac{\sin x}{x}, \quad \text{dom } \frac{f}{g} = \mathbb{R}_0,$$

$$f + g = x + \sin x,$$

$$f \cdot g = x \cdot \sin x,$$

$$g \circ f = \sin x,$$

$$f \circ g = \sin x$$

1.2.

$$\frac{f}{g} = \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 3}, \quad \text{dom } \frac{f}{g} = \mathbb{R},$$

$$f + g = x^2 + 2x + 3 + \cos x,$$

$$f \cdot g = (x^2 + 2x + 3) \cdot \cos x,$$

$$f \circ g = \cos(x^2 + 2x + 3),$$

$$g \circ f = \cos^2 x + 2 \cos x + 3$$

1.3.

1.  $f(x) = x^2, g(x) = 3x, h(x) = 4, \quad y = f + g + h$
2.  $f(x) = x + 1, g(x) = x + 2, \quad y = f \cdot g$
3.  $f(x) = x + 1, g(x) = x + 2, \quad y = \frac{f}{g}$
4.  $g(x) = \sqrt{x}, f(x) = x^2 + x, \quad y = g \circ f$
5.  $g(x) = e^x, f(x) = x^2 \sin x, \quad y = g \circ f$
6.  $f(x) = 2x + 1, g(x) = \cos x, \varphi(x) = x^3 + 3x^2, \psi(x) = \sin x,$   
 $h = g \circ f, \phi = \psi \circ \varphi,$   
 $y = \phi \cdot h$
7.  $f(x) = \log_2(x), g(x) = \sin x, \quad y = g \circ f$
8.  $f(x) = 3x + 2, g(x) = 5^x, h(x) = \text{tg } x, \quad y = h \circ (g \circ f)$
9.  $f(x) = x^2, g(x) = x, \quad y = g^f$
10.  $f(x) = \log_2(x), g(x) = \sin x^2, h = f \cdot g, \quad y = x^h(x)$

1.4.

- |      |              |
|------|--------------|
| 1. 0 | 5. $-\infty$ |
| 2. 1 | 6. ?         |
| 3. 2 | 7. 0         |
| 4. 0 | 8. $-\infty$ |



# HOOFDSTUK 2

## LIMIETEN

⊗ **2.1.** Bereken, met behulp van de definitie, de limiet van  $f(x) = x^2$  voor  $x$  naderend tot 2.

⊗⊗ **2.2.** Gegeven is de functie  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ . Beschouw nu achtereenvolgens de getallenrijen

$$x_n = \frac{1}{2\pi n}, \quad x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad x_n = \frac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n},$$

die allen naderen naar 0. Bereken de beeldrijen van deze getallenrijen onder de functie  $f$ .  
Wat merk je op? Wat besluit je over  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$ ?

⊗ **2.3.** Bepaal

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x}$$

⊗ **2.4.** Toon aan dat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \sim 2.7182818$$

☞☞ **2.5.** Bereken de volgende limieten.

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x+2}$

2.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + 4x + 9$

3.  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{x^2 + 1}$

4.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-2}{x+2}$

## Oplossingen - Solutions

2.1. 4

2.2. De limiet  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  bestaat niet! De drie reeksen streven allen naar 0, maar de drie beeldrijen hebben niet dezelfde limiet (0, 1 en  $-1$ ).

*La limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  n'est pas définie! Les trois suites données tendent vers 0, mais les suites des images n'ont pas la même limite (0, 1 et  $-1$ ).*

2.3. 0

2.4. Beschouw (bijvoorbeeld) de getallenrij

$$x_n = \frac{1}{10^n} \quad 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$$

en bereken de beelden van deze getallenrij:

$$(1 + 1)^1 = 2,0000; \quad (1, 1)^{10} = 2,5937; \quad (1, 01)^{100} = 2,7048; \quad (1, 001)^{1000} = 2,7169; \dots$$

(Dit is geen volledig bewijs! In principe dien je deze berekening immers uit te voeren voor elke getallenrij  $x_n \rightarrow 0$ .)

*Considérons (par exemple) la suite*

$$x_n = \frac{1}{10^n} = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$$

*et calculons les images des éléments de cette suite:*

$$(1 + 1)^1 = 2,0000; \quad (1, 1)^{10} = 2,5937; \quad (1, 01)^{100} = 2,7048; \quad (1, 001)^{1000} = 2,7169; \dots$$

*(Ceci n'est pas une démonstration complète! A cet effet, il faut montrer que ce comportement est le même pour n'importe quelle suite  $x_n \rightarrow 0$ .)*

2.5.

1.  $\frac{1}{5}$

2.  $+\infty$

3.  $+\infty$

4.  $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x-2}{x+2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x-2}{x+2} = -\infty$



# HOOFDSTUK 3

# CONTINUÏTEIT

**Oplossingen - Solutions**



# HOOFDSTUK 4

## AFGELEIDEN

► **4.1.** Bereken, *met behulp van de definitie*, de afgeleide functie van de volgende reële functies.

$$\begin{array}{ll} 1. & y = x^3 \\ 2. & y = x^4 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 3. & y = x^2 + 3x + 5 \\ 4. & y = \frac{1}{x} \end{array}$$

► **4.2.** Bereken de afgeleiden van volgende functies.

$$\begin{array}{l} 1. & y = 9x^5 - 8x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 2x + 1 \\ 2. & y = \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} \\ 3. & y = \sqrt{2x} + 2\sqrt{x} \\ 4. & y = \frac{3 - 2x}{3 + 2x} \\ 5. & y = (1 - 5x)^6 \end{array}$$

⊙ **4.3.** (Labo C1) Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

1. $y = 3x$	7. $y = \frac{2x}{(6-x)^2}$	12. $y = \frac{1}{\sqrt{3x+5}}$
2. $y = \frac{5}{3}x^3$	8. $y = \frac{3x^2+x+1}{x-1}$	13. $y = (x^3+x^2)\sqrt[3]{3x^2+1}$
3. $y = 4x^5 - 3x^2 + 7$	9. $y = (x^2-x)^2$	14. $y = -\frac{1}{x}\sqrt{x^2+1}$
4. $y = (x+1)(3x-2)$	10. $y = \sqrt[3]{(x^4-1)^2}$	15. $y = \frac{3x^2}{(x^2+4)^2}$
5. $y = (1-x)\sqrt[3]{x}$	11. $y = (x+2)^2(x-1)^3$	16. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
6. $y = \frac{2}{x} - \frac{3}{x^3}$		

⊕ **4.4.** Bereken de afgeleiden van volgende functies.

1. $y = \sqrt[3]{3x^2} - \frac{1}{\sqrt{5x}}$	4. $y = \sqrt{x^2 + 6x + 3}$
2. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^5$	5. $y = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
3. $y = (x^2+4)^2(2x^3-1)^3$	6. $y = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

► **4.5.** Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

1.  $y = \sin 3x + \cos 2x$
2.  $y = 3 \sin 2x$
3.  $y = 4 \operatorname{tg} 5x$
4.  $y = \sec x = \frac{1}{\cos(x)}$

► **4.6.** Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

1.  $y = \arcsin 3x$
2.  $y = \arcsin(x-1)$

⊙ 4.7. (Labo C1/C2) Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $y = \sin x + \cos x$                        | 5. $y = x \operatorname{tg} \frac{1}{x}$  |
| 2. $y = 2x \operatorname{tg} x$                 | 6. $y = \sin^2 x^2$   |
| 3. $y = x^2 - \frac{1}{2} \sin 2x$              | 7. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}}$ |
| 4. $y = \sin \sqrt{x} + \sqrt{x} \cos \sqrt{x}$ | 8. $y = \frac{1}{\arccos x}$  |

⊙ 4.8. Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

- |  |                                     |
|--|-------------------------------------|
| 1. $y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin(x)}$  | 5. $y = \operatorname{tg}^2 x$      |
| 2. $y = x^2 \sin x$                                  | 6. $y = \sin^2(3x - 2)$             |
| 3. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$           | 7. $y = \sec^3 \sqrt{x}$            |
| 4. $f(\theta) = \sqrt{\operatorname{cosec} 2\theta}$ | 8. $y = \operatorname{tg}(1 - x)^2$ |

⊙ 4.9. Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| 1. $y = \operatorname{arctg} 3x^2$ | 3. $y = \operatorname{arctg} \frac{3}{x}$            |
| 2. $y = \arcsin(x) - 1$            | 4. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}$ |

⊙ 4.10. (Labo C2) Bereken de afgeleide functies van volgende reële functies.

- |   |                                  |
|---|----------------------------------|
| 1. $y = x^4 \ln x$                      | 8. $y = \frac{\sin x^4}{e^{3x}}$ |
| 2. $y = e^{\arcsin x}$                  | 9. $y = e^{3x - \cos 2x}$        |
| 3. $y = \ln(\cos 2x \cos 3x)$           | 10. $y = 5^{\sqrt{x}}$           |
| 4. $y = x^2 3^x$                        | 11. $y = \log \sqrt{4 - x^2}$    |
| 5. $y = \ln \ln \operatorname{tg} x$    | 12. $y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$    |
| 6. $y = x^{\ln x}$                      | 13. $y = (x^2 + 2)^3(1 - x^3)^4$ |
| 7. $y = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$ |                                  |

⊗ 4.11. Bereken de afgeleiden van volgende functies.

- |                        |  |
|------------------------|--|
| 1. $y = \ln 3x^5$      | 7. $y = 3^{-x^2}$                      |
| 2. $y = x \ln x - x$   | 8. $y = \ln^2(x + 3)$                  |
| 3. $y = x^2 3^x$       | 9. $y = \ln(\ln(\operatorname{tg} x))$ |
| 4. $y = e^{-x} \cos x$ | 10. $y = \operatorname{tg}^2 e^{3x}$   |
| 5. $y = e^{x^2}$       | 11. $y = \arcsin e^x$                  |
| 6. $y = e^{\sin x}$    | 12. $y = e^{e^x}$                      |

⊗⊗ 4.12. Bereken de afgeleide van volgende functies.

- |                    |                       |
|--------------------|-----------------------|
| 1. $y = x^{2x}$    | 3. $y = x^{\sin x}$   |
| 2. $y = x^{\ln x}$ | 4. $y = x^{e^{-x^2}}$ |

⊞ 4.13. Bereken de afgeleiden van volgende functies.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $y = (3x + 1)(x^2 - 4)(x^3 - x)^2$                           | 8. $y = \frac{1}{\arcsin x}$  |
| 2. $y = \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^2 - x + 2}$                      | 9. $y = \arccos\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$                          |
| 3. $y = \frac{1}{x} - \frac{4}{3x\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}$    | 10. $y = \cos^5(\operatorname{cotg} \sqrt{x})$                        |
| 4. $y = \ln(x^3 + 3)$   | 11. $y = \frac{\sin(x^4)}{e^{3x}}$                                    |
| 5. $y = x \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$            | 12. $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{3x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}$ |
| 6. $y = \cos^2(x^2 + 4x + 1)$                                   | 13. $y = \ln\left(\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$ |
| 7. $y = \frac{x^2 - 5}{\sin^2 x}$                               | 14. $y = e^{3x - \cos 2x}$  |
| 15. $y = \operatorname{tg}(e^x)$                                | 23. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$                              |
| 16. $y = \frac{e^{-2x}}{x^2}$                                   | 24. $y = (2x^3 - 3x + 5)^4$   |
| 17. $y = \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}}$ | 25. $y = (\operatorname{tg} \sqrt{x})^3$                              |
| 18. $y = \log_{10} \sqrt{4 - x^2}$                              | 26. $y = \sqrt{x^3 + \frac{1}{x}}$                                    |
| 19. $y = x^x$   | 27. $y = \sin(\cos(2x - 1))$  |
| 20. $y = x^{\log_{10} x}$                                       | 28. $y = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 3}}{x^2 - \sqrt{x}}$                 |
| 21. $y = 5\sqrt{x}$   | 29. $y = \ln^3 \sin x^2$  |
| 22. $y = x^{(x^2)}$   |   |

☆ 4.14. Bereken de afgeleide van volgende reële functies.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $y = x^{\sin \sqrt{x}}$  | 9. $y = x^{\text{tg } \sqrt{x}}$               |
| 2. $y = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$                               | 10. $y = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$    |
| 3. $y = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1-2e^x}{1+2e^x}}\right)$             | 11. $f(x) = e^{4x} \sin(3x)$                   |
| 4. $y = \sin(x^x)$  | 12. $y = x^{\ln^2 x}$                          |
| 5. $y = x^{(x^2)}$  | 13. $y = x^{x^2+x}$                            |
| 6. $f(x) = x \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)$ | 14. $y = x^{(e^x)}$                            |
| 7. $f(x) = \frac{\cos(\ln x)}{\sin e^x}$                              | 15. $y = (\ln x)^{\arcsin \sqrt{x}}$           |
| 8. $f(x) = \ln(\sin(\sqrt{x}))e^{5 \cos(x)}$                          | 16. $f(x) = \frac{\ln \sin \sqrt{x}}{x^3 + 2}$ |
|   | 17. $y = \left(1 - \frac{4}{x}\right)^x$       |

⊙ 4.15. (Labo C2) Bereken de eerste afgeleide van de volgende impliciete functies.

1.  $x^3 y + xy^3 = 2$
2.  $x^2 y - xy^2 + x^2 + y^2 = 6$
3.  $x \cos y = \sin(x + y)$

⊗⊗ 4.16. Bereken de eerste en tweede afgeleide van de volgende impliciete functies.

1.  $x^3 y + xy^3 = 2$
2.  $x^2 y - xy^2 + x^2 + y^2 = 0$  in/en  $(1, -1)$

► 4.17. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie  $y = x^2 - 4x + 1$  in het punt  $x = 2$ .

► 4.18. Bereken de hoek tussen de  $x$ -as en de raaklijn aan de grafiek van de functie  $y = x^2 - 3x + 5$  in het punt  $x = 2$  en in het punt  $x = 0$ .

⊗⊗ 4.19. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van de functie  $y = -x^2 + 5x - 6$  in de punten waar  $y = 0$ .

☆ 4.20. Bereken de tweede afgeleide van de (impliciete) functie

$$x^2 - x^4 - y^2 = -1$$

in het punt  $(1, 1)$ .

⊗⊗ 4.21. Bereken een benaderde waarde voor de volgende uitdrukkingen, gebruik makend van differentiaal. Controleer telkens de precisie van de afchatting door de bekomen waarde te vergelijken met de exacte waarde.

- |    |                |    |                       |
|----|----------------|----|-----------------------|
| 1. | $\sqrt{99}$    | 3. | $\sin \frac{\pi}{10}$ |
| 2. | $\sqrt[3]{30}$ | 4. | $\cos \frac{1}{10}$   |

## Oplossingen - Solutions

## 4.1.

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^3 - x^3}{\Delta} = 3x^2 & 3. \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta) - f(x)}{\Delta} = 2x + 3 \\
 2. \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta)^4 - x^4}{\Delta} = 4x^3 & 4. \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta} - \frac{1}{x}}{\Delta} = -\frac{1}{x^2}
 \end{array}$$

## 4.2.

$$\begin{array}{l}
 1. \quad 45x^4 - 32x^3 - 15x^2 - 6x + 2 \\
 2. \quad -\frac{x^2 + 6x + 6}{x^4} \\
 3. \quad \frac{2 + \sqrt{2}}{2\sqrt{x}} \\
 4. \quad \frac{-12}{(3 + 2x)^2} \\
 5. \quad -30(1 - 5x)^5
 \end{array}$$

## 4.3.

$$\begin{array}{lll}
 1. \quad 3 & 7. \quad \frac{2(6+x)}{(6-x)^3} & 12. \quad \frac{-3}{2\sqrt{(3x+5)^3}} \\
 2. \quad 5x^2 & 8. \quad \frac{3x^2 - 6x - 2}{(x-1)^2} & 13. \quad \frac{x(11x^3 + 8x^2 + 3x + 2)}{\sqrt[3]{(3x^2 + 1)^2}} \\
 3. \quad 2x(10x^3 - 3) & 9. \quad 2x(2x-1)(x-1) & 14. \quad \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}} \\
 4. \quad 6x + 1 & 10. \quad \frac{8x^3}{3\sqrt[3]{x^4-1}} & 15. \quad \frac{6x(2+x)(2-x)}{(x^2+4)^3} \\
 5. \quad \frac{1-4x}{3\sqrt[3]{x^2}} & 11. \quad (x+2)(x-1)^2(5x+4) & 16. \quad \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \\
 6. \quad \frac{9-2x^2}{x^4} & &
 \end{array}$$

## 4.4.

$$\begin{array}{ll}
 1. \quad \frac{2\sqrt[3]{3}}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{x^3}} & 4. \quad \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x+3}} \\
 2. \quad \frac{5x^4}{(1+x)^6} & 5. \quad \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt{(x+1)^3}} \\
 3. \quad 2x(x^2+4)(2x^3-1)^2(13x^3+36x-2) & 6. \quad \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}
 \end{array}$$

4.5.

1.  $3 \cos 3x - 2 \sin 2x$
2.  $6 \cos 2x$
3.  $\frac{20}{\cos^2 5x}$
4.  $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$

4.6.

1.  $\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$
2.  $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$

4.7.

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\cos x - \sin x</math></li> <li>2. <math>\frac{\sin 2x + 2x}{\cos^2 x}</math></li> <li>3. <math>2x - \cos 2x</math></li> <li>4. <math>\frac{1}{2\sqrt{x}}(2 \cos \sqrt{x} - \sqrt{x} \sin \sqrt{x})</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>\operatorname{tg} \frac{1}{x} - \frac{1}{x \cos^2 \frac{1}{x}}</math></li> <li>6. <math>2x \sin 2x^2</math></li> <li>7. <math>\frac{1}{1 + \cos^2 x}</math></li> <li>8. <math>\frac{1}{\arccos^2(x) \sqrt{1-x^2}}</math></li> </ol> |
|---|---|

4.8.

- |  |  |
|--|--|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>-\frac{\cos x}{\sin^2 x}</math></li> <li>2. <math>2x \sin x + x^2 \cos x</math></li> <li>3. <math>x^2 \cos x</math></li> <li>4. <math>-\frac{\cos 2\theta}{\sin^2 2\theta \sqrt{\operatorname{cosec} 2\theta}}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>5. <math>\frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x}</math></li> <li>6. <math>6 \sin(3x-2) \cos(3x-2)</math></li> <li>7. <math>\frac{3 \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cos^4 \sqrt{x}}</math></li> <li>8. <math>\frac{2(x-1)}{\cos^2(1-x)^2}</math></li> </ol> |
|--|--|

4.9.

- |   |   |
|---|---|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\frac{6x}{1+9x^4}</math></li> <li>2. <math>\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>3. <math>-\frac{3}{x^2+9}</math></li> <li>4. <math>2\sqrt{a^2-x^2}</math></li> </ol> |
|---|---|



## 4.10.

1.  $x^3(4 \ln x + 1)$
2.  $\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}$
3.  $-2 \operatorname{tg} 2x - 3 \operatorname{tg} 3x$
4.  $x3^x(2 + x \ln 3)$
5.  $\frac{2}{\ln(\operatorname{tg} x) \sin 2x}$
6.  $2 \ln x x^{\ln x - 1}$
7.  $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} \left( \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln \operatorname{tg} x \right)$
8.  $\frac{4x^3 \cos x^4 - 3 \sin x^4}{e^{3x}}$
9.  $e^{3x - \cos 2x}(3 + 2 \sin 2x)$
10.  $\frac{5\sqrt{x} \ln 5}{2\sqrt{x}}$
11.  $-\frac{x}{(4-x^2) \ln 10}$
12.  $-\frac{2e^{-2x}(x+1)}{x^3}$
13.  $6x(x^2+2)^2(1-x^3)^3(1-3x^3-4x)$

## 4.11.

1.  $\frac{5}{x}$
2.  $\ln x$
3.  $x3^x(2 + x \ln 3)$
4.  $-e^{-x}(\cos x + \sin x)$
5.  $2xe^{x^2}$
6.  $e^{\sin x} \cos x$
7.  $-2x3^{-x^2} \ln 3$
8.  $\frac{2 \ln(x+3)}{x+3}$
9.  $\frac{1}{\ln(\operatorname{tg} x) \sin x \cos x}$
10.  $6 \frac{\sin e^{3x} e^{3x}}{\cos^3 e^{3x}}$
11.  $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
12.  $e^{e^x+x}$

## 4.12.

1.  $2x^{2x}(\ln x + 1)$
2.  $x^{\ln x} \frac{2 \ln x}{x}$
3.  $x^{\sin x} \left( \cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$
4.  $x^{e^{-x^2}} e^{-x^2} \left( \frac{1}{x} - 2x \ln x \right)$

## 4.13.

1.  $x(x^2 - 1)(27x^5 + 8x^4 - 99x^3 - 28x^2 + 36x + 8)$
2.  $\frac{3x^4 - 2x^3 + 6x + 3}{(3x^2 - x + 2)^2}$
3.  $\frac{-x + 2\sqrt{x} + 1}{x^3}$
4.  $\frac{3x^2}{x^3 + 3}$
5.  $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x \cos^2 \frac{1}{x}}$
6.  $-2(x + 2) \sin(2x^2 + 8x + 2)$
7.  $\frac{2(x \sin x - (x^2 - 5) \cos x)}{\sin^3 x}$
8.  $-\frac{1}{\sqrt{1 - x^2} \arcsin^2 x}$
9.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}(2 + x)}$
10.  $\frac{5 \cos^4(\operatorname{cotg} \sqrt{x}) \sin(\operatorname{cotg} \sqrt{x})}{2\sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}}$
11.  $\frac{4x^3 \cos x^4 - 3 \sin(x^4)}{e^{3x}}$
12.  $-\frac{2}{x^3} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}$
13.  $-\frac{1}{\sin x}$
14.  $e^{3x - \cos 2x} (3 + 2 \sin 2x)$
15.  $\frac{e^x}{\cos^2(e^x)}$
16.  $-2e^{-2x} \frac{x + 1}{x^3}$
17.  $\frac{-2x}{x^4 - 1}$
18.  $-\frac{x}{\ln(10)(4 - x^2)}$
19.  $x^x (\ln x + 1)$
20.  $x^{\log_{10} x} \frac{\ln x + \ln 10 \log_{10} x}{x \ln 10}$
21.  $\frac{5\sqrt{x} \ln 5}{2\sqrt{x}}$
22.  $x^{(x^2)+1} (2 \ln x + 1)$
23.  $\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$
24.  $12(2x^3 - 3x + 5)^3(2x^2 - 1)$
25.  $\frac{3 \sin^2 \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cos^4 \sqrt{x}}$
26.  $\frac{3x^4 - 1}{2x\sqrt{x}\sqrt{x^4 + 1}}$
27.  $-2 \cos(\cos(2x - 1)) \sin(2x - 1)$
28.  $\frac{-4x^3\sqrt{x} + 6x^2\sqrt{x} - 12x\sqrt{x} - 2x^2 + 3}{2\sqrt{x}\sqrt{2x^2 - 2x + 3}(x^2 - \sqrt{x})^2}$
29.  $6x \ln^2 \sin x^2 \operatorname{cotg} x^2$

## 4.14.

1.  $x^{\sin \sqrt{x}} \frac{\sqrt{x} \cos \sqrt{x} \ln x + 2 \sin \sqrt{x}}{2x}$
2.  $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-2x^2}}$
3.  $\frac{-e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-2e^x}(1+2e^x)}$
4.  $\cos(x^x)x^x(\ln x + 1)$
5.  $x^{(x^2)+1}(2 \ln x + 1)$
6.  $\operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \right) + \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(x+1)}}$
7.  $\frac{-\sin e^x \sin \ln x - x e^x \cos e^x \cos \ln x}{x \sin^2 e^x}$
8.  $\left( \frac{\operatorname{cotg} \sqrt{x}}{2\sqrt{x}} - 5 \sin x \ln \sin \sqrt{x} \right) e^{5 \cos(x)}$
9.  $\frac{1}{2 \cos^2 \sqrt{x}} x^{\operatorname{tg} \sqrt{x}-1} (\sqrt{x} \ln x + 2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x})$
10.  $\left( 1 + \frac{2}{x} \right)^{2x} \left( 2 \ln \left( 1 + \frac{2}{x} \right) - \frac{4}{x+2} \right)$
11.  $e^{4x} (4 \sin(3x) + 3 \cos(3x))$
12.  $3x^{\ln^2 x-1} \ln^2 x$
13.  $x^{x^2+x} ((2x+1) \ln x + x+1)$
14.  $x^{(e^x-1)} e^x (x \ln x + 1)$
15.  $(\ln x)^{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}} \left( \frac{\ln \ln x}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}} + \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{x}}{x \ln x} \right)$
16.  $\frac{(x^3+2) \operatorname{cotg} \sqrt{x} - 6x^2 \sqrt{x} \ln \sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x^3+2)^2}$
17.  $\left( 1 - \frac{4}{x} \right)^x \left( \ln \left( 1 - \frac{4}{x} \right) + \frac{4}{x-4} \right)$

## 4.15.

1.  $y' = -\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}$
2.  $y' = \frac{y^2 - 2xy - 2x}{x^2 - 2xy + 2y}$
3.  $y' = \frac{\cos y - \cos(x+y)}{\cos(x+y) + x \sin y}$

## 4.16.

1.  $y' = -\frac{3x^2y + y^3}{x^3 + 3xy^2}, \quad y'' = -\frac{6xy + 6x^2y' + 6y^2y' + 6xy(y')^2}{x^3 + 3xy^2}$
2.  $y' = 1, \quad y'' = -8$

## 4.17.

$$m = 0$$

## 4.18.

$$x = 2: \quad \alpha = 45^\circ = \frac{\pi}{4}, \quad x = 0: \quad \alpha = 108^\circ 26', \quad 1' = 1,89$$

## 4.19.

$$x = 2: \quad m = 1, \quad x = 3: \quad m = -1$$

**4.20.**

$$y' = -1, \quad y'' = -6$$

**4.21.**

1.  $x = 100, dx = -1, \sqrt{99} \sim 10 + \frac{-1}{20} = 9,95$
2.  $x = 27, dx = 3, \sqrt[3]{30} \sim 3 + \frac{1}{9} = 3,1111$
3.  $x = 0, dx = \frac{\pi}{10}, \sin \frac{\pi}{10} \sim \frac{\pi}{10} = 0,3142$
4.  $x = 0, dx = \frac{1}{10}, \cos \frac{1}{10} \sim 1$

# HOOFDSTUK 5

## TOEPASSINGEN VAN AFGELEIDEN

► **5.1.** Bepaal de kritische punten van de gegeven functie.

1.  $y = x^2$

2.  $y = x^3 - 3x + 1$

◎ **5.2.** (Labo C3) Bepaal de intervallen waar de gegeven functie stijgt. Bepaal de maxima, minima en buigpunten.

1.  $y = (x - 1)^3(x - 2)$

2.  $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5$

3.  $y = \frac{3x - 6}{x + 3}$

◎ **5.3.** (Labo C3) Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de buigpunten van volgende functies. Ga ook na waar de functies dalend, stijgend, convex en concaaf zijn.

1.  $y = (2 - x)^3$

2.  $y = \frac{t^2}{t^2 + 9}$

⊗⊗ 5.4. Bepaal de minima, maxima en buigpunten van volgende functies. Bereken de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in de buigpunten. Bespreek ook in welke gebieden de functies stijgend, dalend, convex of concaaf zijn, en bepaal het domein van de functies. Gebruik al deze informatie om de grafiek van de functies te schetsen.

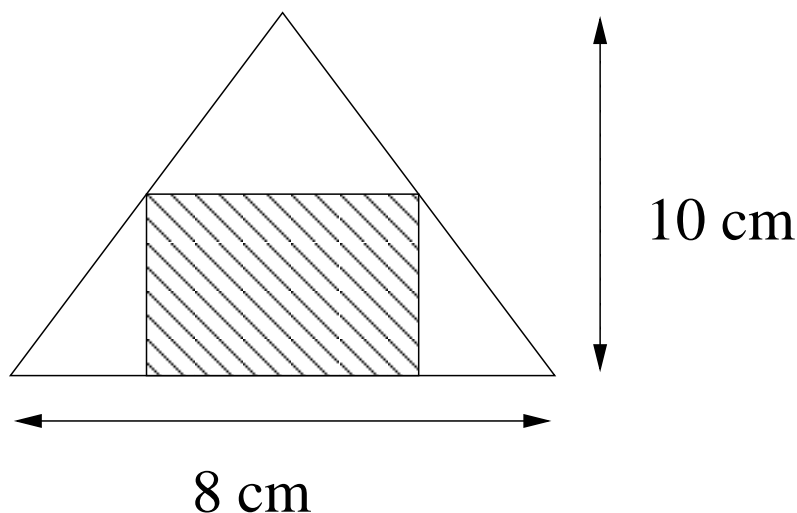
$$\begin{array}{ll}
 1. & y = x^3 - 3x^2 + 3x - 7 \\
 2. & y = \frac{x^3}{2(x+1)^2} \\
 3. & y = \frac{3x-6}{x^2-2x+1} \\
 4. & y = \sqrt{x^2(x-3)} \\
 5. & y = \sqrt[3]{x^3-3x+2}
 \end{array}$$

☆ 5.5. Bepaal de minima en de maxima van de gegeven functie. Zoek ook de buigpunten van de functie en bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de grafiek van de functie in elk van deze buigpunten.

$$\begin{array}{ll}
 1. & y = x^4 - 2x^2 + 1 \\
 2. & y = \frac{x}{(x+1)^2} \\
 3. & y = \frac{x}{(x-2)^2} \\
 4. & y = \frac{x-4}{(x-1)^2} \\
 5. & y = \frac{x^2-9}{x^2+3} \\
 6. & y = \frac{x^2-9}{x^2+1} \\
 7. & y = \ln(x^2+1) \\
 8. & y = \ln(x^2+16) \\
 9. & y = \ln(x^4+27) \\
 10. & y = \sqrt{x^3+3x^2} \\
 11. & y = \sqrt{x^3-3x^2+4} \\
 12. & y = \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+3}} \\
 13. & y = \sqrt[3]{x(x-6)^2} \\
 14. & y = \sqrt[3]{x^3+3x^2+2} \\
 15. & y = \sqrt[3]{x^2+2x+4} \\
 16. & y = e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}
 \end{array}$$

⊙ 5.6. (Labo C3) De som van twee getallen is 12. Bepaal de getallen zó dat het product van het eerste met het kwadraat van het tweede getal maximaal is.

- ⊙ 5.7. (Labo C3) Als een landbouwer vandaag oogst, zou hij 1200 manden appels hebben, en ontvangt hij 2 euro per mand. Voor elke week die hij langer wacht om te oogsten, stijgt zijn oogst met 100 manden, maar daalt de prijs met 0,1 euro per mand. Binnen hoeveel weken moet hij oogsten om zo veel mogelijk winst te maken?
- ⊙ 5.8. (Labo C3) De oppervlakte van een rechthoekige affiche mag  $6\text{m}^2$  bedragen. Er moet tekst op gedrukt worden, waarbij links en rechts 20 cm onbedrukt blijven, en boven en onderaan 50 cm onbedrukt is. Bepaal de afmetingen van de affiche zó dat de bedrukbare oppervlakte maximaal is.
- ⊙ 5.9. (Labo C3) Van een vierkant stuk karton met een zijde van 12 cm maakt men een doos zonder deksel door in elke hoek een vierkant met zijde  $x$  cm weg te snijden en de randen om te plooien. Bepaal  $x$  zó dat de doos een maximale inhoud heeft.
- ☆ 5.10. In een gelijkbenige driehoek (Figuur 1) met basis 8 cm en hoogte 10 cm wordt een rechthoek ingeschreven. Bepaal de afmetingen van de rechthoek zó dat zijn oppervlakte maximaal is.



Figuur 1.

- ☆ 5.11. In een cirkel met straal  $R = 4$  wordt een rechthoek ingeschreven. Bepaal de hoogte en de breedte van deze rechthoek zó dat zijn oppervlakte maximaal wordt.
- ☆ 5.12. Een rechthoek wordt ingeschreven in de ellips met vergelijking  $4x^2 + 9y^2 = 36$ . Bepaal de hoogte van de rechthoek zó dat zijn oppervlakte maximaal wordt.

☆ **5.13.** Uit een cilindervormige boomstam met straal 60cm wil men een balk zagen. De buigsterkte van een balk wordt bepaald door het product van de breedte en het kwadraat van de hoogte van de balk. Bepaal de hoogte en breedte van de balk zó dat zijn buigsterkte maximaal wordt. (11/2006)

► **5.14.** Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de gegeven kromme in het gegeven punt.

1.  $y = 2x^2 + 1, \quad x_0 = -1$
2.  $y = x^3 - 2x^2 + 3x, \quad x_0 = 2$
3.  $y = \sin 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$
4.  $x^2 + y^2 = 4, \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

⊗ **5.15.** Bereken de vergelijking van de raaklijn en de normaal aan de gegeven kromme in het gegeven punt.

1.  $y = 2x^2 + 1, \quad x_0 = -1$
2.  $y = x^4 - 3x^2 + 2x, \quad x_0 = 1$
3.  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right), \quad x_0 = \frac{3\pi}{2}$
4.  $y = e^x + \ln x, \quad x_0 = 1$
5.  $y = x^3 + 2x^2 + 3x, \quad x_0 \in \mathbb{R}$

⊗⊗ **5.16.** Bereken de vergelijking van de raaklijn en de normaal aan de gegeven kromme in het gegeven punt.

1.  $x^2 + y^2 = 1, \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
2.  $x^3 + 3xy^2 = 4, \quad (1, 1)$
3.  $x^2 + y^2 = 4, \quad (x_0, y_0)$
4.  $x^2 + 3xy + y^2 = 5, \quad (x_0, y_0)$



- ⊙ **5.17.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme  $y = x^3 + 5$  die evenwijdig is met de rechte gegeven door  $12x - y = 17$ .
- ⊙ **5.18.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn met richtingscoëfficiënt  $\frac{1}{6}$  aan de ellips met vergelijking  $2x^2 + 4y^2 = 16$ .
- ⊙ **5.19.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn en de normaal aan de kromme  $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$  in het punt  $(-2, 5)$ .
- ⊙ **5.20.** (Labo C4) Bepaal het punt van de kromme  $y^2 = 2x^3$  waar de raaklijn loodrecht staat op de rechte met vergelijking  $4x - 3y + 2 = 0$ .
- ⊙ **5.21.** (Labo C4) Bepaal de punten van de kromme  $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$  waarin de raaklijn door de oorsprong loopt.
- ⊙ **5.22.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de kromme  $y^2 = 20x$  die een hoek van  $45^\circ$  maakt met de positieve kant van de  $x$ -as.
- ⊙ **5.23.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn en de normaal aan de kromme  $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$  in  $x_0 = \frac{3\pi}{2}$ .

⊙ **5.24.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de parabool  $y = x^2$  in de snijpunten van de parabool met de rechte  $y = 2x$ .

⊙ **5.25.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn en de normaal aan de kromme  $y = \frac{1}{x^2}$  in het punt  $x = 2$ .

⊙ **5.26.** (Labo C4) Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de cirkel  $x^2 + y^2 = 4$ , gaande door het punt  $(3, 0)$ .

⊠ **5.27.** Toon aan dat de normaal in elk punt van de cirkel met vergelijking  $x^2 + y^2 = 9$  door de oorsprong  $(0, 0)$  gaat.

⊗⊗ **5.28.** Bereken de coördinaten van de punten waarin de raaklijn aan de grafiek evenwijdig is met de gegeven rechte.

1.  $y = 3x^3 + 9x + 4, \quad 9x - y + 7 = 0$

2.  $x^2 + y^2 = 4, \quad x - y = 0$

3.  $y = \cos x, \quad x + y + 3 = 0$

4.  $x^2 + 3y^2 = 6, \quad x = 0$

☆ **5.29.** Bereken de punten waarin de raaklijn aan de grafiek van de functie

$$f(x) = x^3 - 2x + 5$$

een hoek van 45 graden maakt met de  $x$ -as.

☆ **5.30.** Bepaal de punten waarin de raaklijn aan de kromme

$$x^3 - xy^2 = 16$$

horizontaal is.

☆ **5.31.** Bepaal alle punten waarin de raaklijn aan de kromme

$$x^3 + y^2 - 3xy = 0$$

horizontaal is.

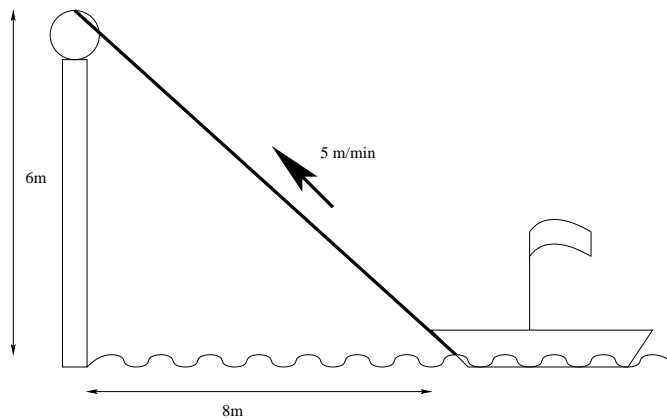
- ☆ **5.32.** Bepaal de punten van de kromme  $x^2 + y^2 = 16$  waarin de raaklijn evenwijdig is met de rechte  $4y = x + 1$ . Bepaal de vergelijking van de normaal op de kromme in deze punten.
- ☆ **5.33.** Bepaal de vergelijking van alle raaklijnen aan de kromme  $y = x^2 + 3$  die door de oorsprong lopen.
- ☆ **5.34.** Bepaal de vergelijking van alle raaklijnen aan de kromme met vergelijking  $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 1$  die evenwijdig zijn met de bissectrice van het eerste kwadrant.
- ☆ **5.35.** Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de ellips met vergelijking  $2x^2 + y^2 = 3$  in alle snijpunten van deze kromme met de parabool met vergelijking  $y = x^2$ .
- ☆ **5.36.** Bepaal de vergelijking van alle raaklijnen aan de kromme met vergelijking  $y = x^3 - 6x^2 + 2x - 5$  die evenwijdig zijn met de rechte met vergelijking  $6x - 3y + 5 = 0$ .
- ☆ **5.37.** Bereken de tweede afgeleide van de (impliciete) functie

$$x^3y + xy^3 = 2$$

in het punt  $(-1, -1)$ . Ga ook na in welke punten van de kromme de hoek tussen de normaal aan de kromme en de  $x$ -as gelijk is aan  $\frac{\pi}{4}$ .

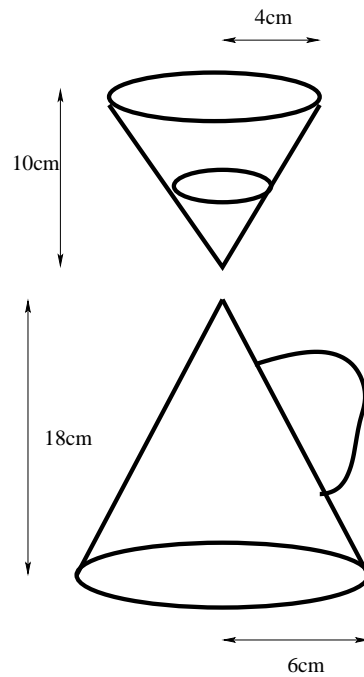
- ▶ **5.38.** De temperatuur  $T$  (in Kelvin) van een (afkoelende) vloeistof wordt gegeven door  $T = 4 + 300e^{-t}$ , waarbij  $t$  de tijd is, uitgedrukt in minuten. Bereken de snelheid waarmee de vloeistof afkoelt na 1 minuut.
- ▶ **5.39.** Hoe snel verandert de omtrek van een cirkel, indien de straal verandert met een snelheid van 1 m/s?

- ⊙ 5.40. (Labo C5) De oppervlakte van een rechthoek, waarvan de lengte het dubbel is van de breedte, neemt toe met  $8\text{cm}^2/\text{s}$ . Met welke snelheid neemt de lengte toe op het moment dat de breedte  $5\text{cm}$  bedraagt?
- ⊙ 5.41. (Labo C5) Twee kinderen bevinden zich op een afstand van  $20\text{ m}$  van elkaar. Een van de kinderen laat een ballon vertikaal opstijgen met een snelheid van  $5\text{ m/s}$ . Bereken de snelheid waarmee de afstand tussen de ballon en de voeten van het tweede kind toeneemt op het ogenblik dat de ballon zich op  $15\text{ m}$  hoogte bevindt.
- ⊙ 5.42. (Labo C5) De kabel in Figuur 2 wordt opgerold met een snelheid van  $5\text{ m/min}$ . Hoe snel nadert het bootje op het moment dat het zich  $8\text{m}$  van de kade bevindt?



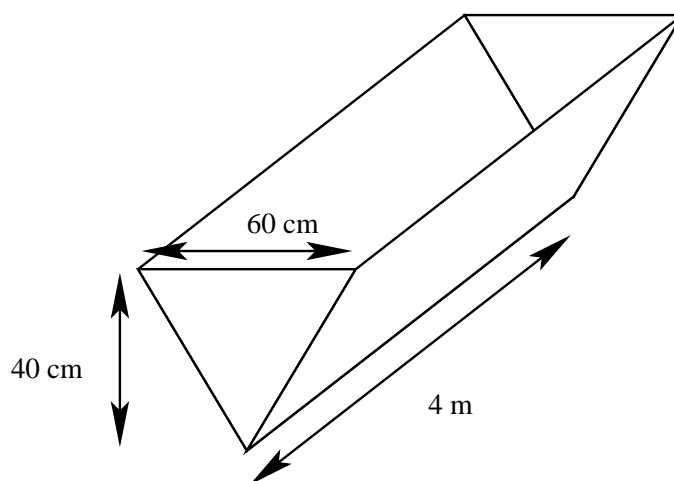
Figuur 2.

- ⊙ 5.43. (Labo C5) De filter van de koffiezet in Figuur 3 loopt leeg met een debiet van  $4\text{cm}^3/\text{s}$ . Er komt geen water meer bij in de filter. Bepaal de snelheid waarmee het waterpeil in de filter verandert op het ogenblik dat er  $4\text{ cm}$  water in de filter staat. Hoe snel stijgt het vloeistofpeil in de koffiekop op het ogenblik dat dat peil  $6\text{ cm}$  bedraagt?



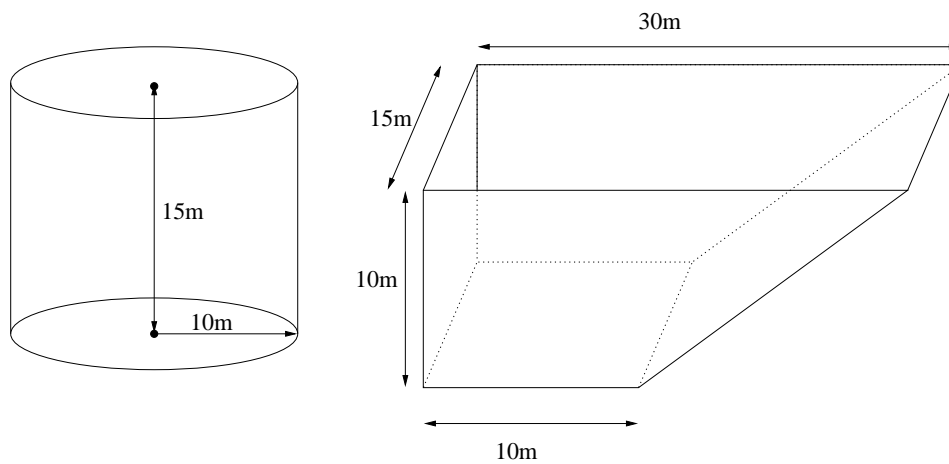
Figuur 3.

- ☆ 5.44. Steengruis wordt op een hoop gestort aan  $180\text{m}^3/\text{min}$ . De hoop heeft een kegelvorm, waarvan de diameter steeds gelijk is aan drie keer de hoogte. Bepaal de snelheid waarmee de diameter van de basis toeneemt op het moment dat de hoogte 6 m bedraagt.
- ☆ 5.45. Een vat gevuld met water (Figuur 4) wordt leeggepompt met een constant debiet van  $7000\text{cm}^3/\text{s}$ . Bepaal de snelheid waarmee het waterpeil verandert op het moment dat dat peil 15 cm bedraagt.



Figuur 4.

- ☆ 5.46. De inhoud van een cilindervormige tank (straal 10m, hoogte 15m) wordt in een bassin (Figuur 5) gepompt. Het vloeistofpeil in de tank verlaagt daarbij met 2cm/s. Bereken de snelheid waarmee het vloeistofpeil in het bassin toeneemt wanneer het peil daar 6m bedraagt.



Figuur 5.

## Oplossingen - Solutions

## 5.1.

1. 0
2. -1, +1

## 5.2.

1. Min :  $(\frac{7}{4}, -\frac{27}{256})$   
 Max :  
 Infl :  $(1, 0), (\frac{3}{2}, -\frac{1}{16})$   
 $\uparrow : ]\frac{7}{4}, +\infty[$   
 $\downarrow : ]-\infty, \frac{7}{4}[$
2. Min :  $(-1, 0)$   
 Max :  $(3, 32)$   
 Infl :  $(1, 16)$   
 $\uparrow : ]-1, 3[$   
 $\downarrow : ]-\infty, -1[ \cup ]3, +\infty[$
3. Min :  
 Max :  
 Infl :  
 $\uparrow : ]-\infty, -3[ \cup ]-3, +\infty[$   
 $\downarrow :$

## 5.3.

1. Infl:  $(2, 0)$ , 0  
 $\uparrow :$   
 $\downarrow : ]-\infty, +\infty[$   
 $\cup : ]-\infty, 2[$   
 $\cap : ]2, +\infty[$
2. Infl:  $(-\sqrt{3}, \frac{1}{4})$ ,  $-\frac{\sqrt{3}}{8}$   
 Infl:  $(\sqrt{3}, \frac{1}{4})$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{8}$   
 $\uparrow : ]0, +\infty[$   
 $\downarrow : ]-\infty, 0[$   
 $\cup : ]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$   
 $\cap : ]-\infty, -\sqrt{3}[ \cup ]\sqrt{3}, +\infty[$

## 5.4.

- |  |   |
|--|---|
| <p>1. <math>\text{dom } f = \mathbb{R}</math><br/>           Min :<br/>           Max :<br/>           Infl : <math>(1, -6)</math><br/>           T : <math>y = -6</math><br/> <math>\uparrow : \mathbb{R}</math><br/> <math>\downarrow :</math><br/> <math>\cup : ]1, +\infty[</math><br/> <math>\cap : ] - \infty, 1[</math></p>   | <p>2. <math>\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}</math><br/>           Min :<br/>           Max : <math>(-3, -\frac{27}{8})</math><br/>           Infl : <math>(0, 0)</math><br/>           T : <math>y = 0</math><br/> <math>\uparrow : ] - \infty, -3[ \cup ] - 1, +\infty[</math><br/> <math>\downarrow : ] - 3, -1[</math><br/> <math>\cup : ]0, +\infty[</math><br/> <math>\cap : ] - \infty, -1[ \cup ] - 1, 0[</math></p>     |
| <p>4. <math>\text{dom } f = [3, +\infty[</math><br/>           Min :<br/>           Max :<br/>           Infl : <math>(4, 4)</math><br/>           T : <math>y = 3x</math><br/> <math>\uparrow : [3, +\infty[</math><br/> <math>\downarrow :</math><br/> <math>\cup : ]4, +\infty[</math><br/> <math>\cap : ]3, 4[</math></p>  | <p>3. <math>\text{dom } f = \mathbb{R} \setminus \{1\}</math><br/>           Min :<br/>           Max : <math>(3, \frac{3}{4})</math><br/>           Infl : <math>(4, \frac{6}{9})</math><br/>           T : <math>x + 9y - 10 = 0</math><br/> <math>\uparrow : ]1, 3[</math><br/> <math>\downarrow : ] - \infty, 1[ \cup ]3, +\infty[</math><br/> <math>\cup : ]4, +\infty[</math><br/> <math>\cap : ] - \infty, 1[ \cup ]1, 4[</math></p> |
| <p>5. <math>\text{dom } f = \mathbb{R}</math><br/>           Min : <math>(1, 0)</math><br/>           Max : <math>(-1, \sqrt[3]{4})</math><br/>           Infl : <math>(-2, 0)</math><br/>           T : <math>x = -2</math><br/> <math>\uparrow : ] - \infty, -1[ \cup ]1, +\infty[</math><br/> <math>\downarrow : ] - 1, 1[</math><br/> <math>\cap : ] - 2, +\infty[</math><br/> <math>\cup : ] - \infty, -2[</math></p> |   |



## 5.5.

- |  |  |                                       |  |
|--|--|---------------------------------------|--|
| 1. Min : $\pm 1$<br>Max : 0<br>Infl : $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 5. Min : 0<br>Max :<br>Infl : $\pm 1$                  | 8. Min : 0<br>Max :<br>Infl : $\pm 4$ | 12. Min :<br>Max : $-1$<br>Infl : $0, -2$            |
| 2. Min :<br>Max : 1<br>Infl : 2                                | 6. Min : 0<br>Max :<br>Infl : $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 9. Min : 0<br>Max :<br>Infl : $\pm 3$ | 13. Min : 6<br>Max : 2<br>Infl : 0                   |
| 3. Min : $-2$<br>Max :<br>Infl : $-4$                          | 7. Min : 0<br>Max :<br>Infl : $\pm 1$                  | 10. Min : 0<br>Max : $-2$<br>Infl : 0 | 14. Min : 0<br>Max : $-2$<br>Infl : $1 \pm \sqrt{3}$ |
| 4. Min :<br>Max : 7<br>Infl : 10                               |  | 11. Min : 2<br>Max : 0<br>Infl : 2    | 15. Min : $-1$<br>Max :<br>Infl : $-4, 2$            |
|  |  |                                       | 16. Min :<br>Max : 1<br>Infl : $0, 2$                |

## 5.6.

4, 8

## 5.7. 4 semaines

## 5.8.

1, 55m  $\times$  3, 87m

## 5.9.

2cm

5.10.  $H = 5,$      $L = 4$

5.11.  $L = 4\sqrt{2}, \quad H = 4\sqrt{2}$

5.12.  $L = 3\sqrt{2}, \quad H = 2\sqrt{2}$

5.13.

$$H = 40\sqrt{6}, \quad B = 40\sqrt{3}$$

5.14.

1.  $-4$
2.  $7$
3.  $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$
4.  $-1$

5.15.

1.  $4x + y + 1 = 0, \quad x - 4y + 13 = 0$
2.  $y = 0, \quad x = 1$
3.  $x - y - \frac{3\pi}{2} - 1 = 0, \quad x + y - \frac{3\pi}{2} + 1 = 0$
4.  $(e + 1)x - y - 1 = 0, \quad x + (e + 1)y - e^2 - e - 1 = 0$
5.  $y - y_0 = (3x_0^2 + 4x_0 + 3)(x - x_0), \quad y - y_0 = -\frac{1}{3x_0^2 + 4x_0 + 3}(x - x_0),$   
 $y_0 = x_0^3 + 2x_0^2 + 3x_0 \quad x_0 \in \mathbb{R}$

5.16.

1.  $\sqrt{3}x - y - 2 = 0, \quad x + \sqrt{3}y = 0$
2.  $x + y - 2 = 0, \quad x - y = 0$
3.  $x_0x + y_0y = 4, \quad x_0y - y_0x = 0$
4.  $T : (3x_0 + 2y_0)y + (2x_0 + 3y_0)x = 2(x_0^2 + 3x_0y_0 + y_0^2),$   
 $N : (2x_0 + 3y_0)y - (3x_0 + 2y_0)x = 3(y_0^2 - x_0^2),$

5.17.

$$y = 12x - 11, \quad y = 12x + 21$$

5.18.

$$6y = x \pm \sqrt{152}$$

5.19.

$$T : y = 5, \quad N : x = -2$$

5.20.

$$\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$$

5.21.

$$(-1, 15), \quad \left(\frac{3}{4}, 20, 90625\right), \quad (-3, 57)$$

5.22.

$$y = x + 5$$

5.23.

$$T : y + 1 = x - \frac{3\pi}{2}, \quad N : y + 1 = -x + \frac{3\pi}{2}$$

5.24.

$$y = 0, \quad y = 4x - 4$$

5.25.

$$T : 4y = -x + 3, \quad N : 4y = 16x - 31$$

5.26.

$$y\sqrt{5} = -2x + 6, \quad y\sqrt{5} = 2x - 6$$

5.27.  $(x_0, y_0) \in C : x_0y - y_0x = 0$ 

5.28.

1.  $(0, 4)$
2.  $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
3.  $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 0), \quad k \in \mathbb{N}$
4.  $(\pm\sqrt{6}, 0)$

5.29.

$$(1, 4), \quad (-1, 6)$$

5.30.

$$(-2, 2\sqrt{3}), \quad (-2, -2\sqrt{3})$$

5.31.

$$(0, 0), \quad (2, 4)$$

5.32.

$$\left(\frac{4}{\sqrt{17}}, -\frac{16}{\sqrt{17}}\right) : 4x + y = 0, \quad \left(-\frac{4}{\sqrt{17}}, \frac{16}{\sqrt{17}}\right) : 4x + y = 0$$

5.33.  $2\sqrt{3}x - y = 0, \quad 2\sqrt{3}x + y = 0$ 

5.34.

$$x = 1 : x - y + 3 = 0, \quad x = 3 : x - y - 1 = 0$$

5.35.

$$(-1, 1): 2x - y + 3 = 0, \quad (1, 1): 2x + y - 3 = 0$$

5.36.

$$2x - y - 5 = 0, \quad 2x - y - 37 = 0$$

5.37.  $y' = -1, \quad y'' = 0, \quad (1, 1), \quad (-1, -1)$

5.38.

$$-110,4 \text{ K/min}$$

5.39.

$$2\pi \text{ m/s}$$

5.40.

$$0,8 \text{ cm/s}$$

5.41.

$$3 \text{ m/s}$$

5.42.

$$-6,25 \text{ m/min}$$

5.43.

$$-\frac{25}{16\pi} \text{ cm/s}, \quad \frac{1}{4\pi} \text{ cm/s}$$

5.44.  $D' = \frac{120}{18\pi} \text{ m/min} = 2,1221 \text{ m/min}$

5.45.  $h' = -\frac{7}{9}\text{cm/s} = -0,7778\text{cm/s}$

5.46.

$$h' = \frac{2\pi}{330}\text{m/s} \sim 1,9\text{cm/s}$$

# HOOFDSTUK 6

## PARTIËLE AFGELEIDEN

► **6.1.** Bereken de afgeleide van de volgende functies ( $a$  is een constante).

$$f(x) = x^2 + 3xa + 7a^2,$$

$$g(y) = a^2 + 3ay + 7y^2.$$

© **6.2.** (Labo C5) Bereken de gevraagde partiële afgeleiden van de gegeven functies.

$$1. \quad z(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$2. \quad z(x, y) = \cos 4x - \sin(2x + 3y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$3. \quad z(x, y) = e^{y^2+xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$4. \quad z(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$5. \quad z(x, y) = x \sin y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},$$

$$6. \quad z(x, y) = x \sin \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y},$$

- ⊙ **6.3.** (Labo C5) Toon aan dat voor de functie

$$z = \ln(x^2 + xy + y^2)$$

geldt dat

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

- ⊙ **6.4.** (Labo C5) Bepaal de waarde van  $\frac{\partial f}{\partial x}$  in het punt  $(2, 5)$ .

$$f(x, y) = xy^3 - y$$

- ⊙ **6.5.** (Labo C5) Bepaal alle partiële afgeleiden van eerste en tweede orde van de gegeven functie.

$$f(x, y, z) = xyz$$

- ⊙ **6.6.** (Labo C5) Bepaal de partiële afgeleide  $\frac{\partial z}{\partial x}$  van de gegeven (impliciete) functie.

$$x^2(2y + 3z) + y^2(3x - 4z) + z^2(x - 2y) = xyz$$

- ⊙ **6.7.** (Labo C6) Bepaal de totale differentiaal  $df$  van de volgende functies.

$$f(x, y) = x^2y^4,$$

$$f(x, y) = e^{\sqrt{x}} \cos y.$$

- ⊙ **6.8.** (Labo C6) Bepaal de totale differentiaal  $df$  van de volgende functie in het punt  $(1, 1)$ .

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2}$$



⊕ **6.9.** Bereken alle partiële afgeleiden van de eerste en de tweede orde van de volgende functies. Bereken eveneens de totale differentiaal van de functies.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $z = 2x^2 - 3xy + 4y^2$               | 7. $f(x, y, z) = xyz$                      |
| 2. $z = 2x^2 - 5xy + y^2$                | 8. $z = \sin(2x + 3y)$                     |
| 3. $z = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$   | 9. $z = \sin 3x \cos 4y$                   |
| 4. $z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}$   | 10. $z = \sin(x - vt)$                     |
| 5. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$                | 11. $z = e^{x^2+3xy}$                      |
| 6. $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ | 12. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ |

☆ **6.10.** Bereken alle partiële afgeleiden van tweede orde van de volgende functies. Bereken ook de totale differentiaal van de functies.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$             | 12. $f(x, y) = e^{x^2y}$                       |
| 2. $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + \ln(xy)$       | 13. $f(x, y) = \ln(x + y)$                     |
| 3. $f(x, y) = \sin(xy)$                    | 14. $f(x, y) = xy \ln(x)$                      |
| 4. $f(x, y) = \sqrt{xy}$                   | 15. $f(x, y) = x^y$                            |
| 5. $f(x, y) = \sin x \sin y$               | 16. $f(x, y) = x^{\ln y}$                      |
| 6. $f(x, y) = \cos(xy)$                    | 17. $f(x, y) = \sin(x^2 - 5y)$                 |
| 7. $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$              | 18. $f(x, y) = e^{y \ln x}$                    |
| 8. $z = x^3 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$  | 19. $f(x, y) = e^{x^2-5xy}$                    |
| 9. $z = x^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)$  | 20. $f(x, y) = e^{\operatorname{tg}(x) \ln y}$ |
| 10. $z = y^2 \cos\left(\frac{y}{x}\right)$ | 21. $f(x, y) = x\sqrt{y}$                      |
| 11. $z = e^{xy} \operatorname{tg}(y)$      |  |

☆ **6.11.** Bereken de volgende partiële afgeleide.

1.  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \operatorname{arcsin} \sqrt{\frac{ye^x}{xe^y}} \right)$
2.  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ye^x - xe^y}{ye^x + xe^y}} \right)$

☆ **6.12.** Beschouw de functie  $u(x, t) = 3(t - x)^{\frac{3}{2}}$ . Bereken

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

⊙ **6.13.** (Labo C6) Het vermogen  $P$  wordt gegeven door  $P = \frac{U^2}{R}$ . Indien  $U = 200V$  en  $R = 8\Omega$ , bereken dan (bij benadering) hoeveel het vermogen afneemt wanneer  $U$  afneemt met  $5V$  en  $R$  afneemt met  $0,2\Omega$ .

⊙ **6.14.** (Labo C6) Gegeven is een cilinder met straal  $R = 5 \pm 0,05\text{cm}$  en hoogte  $H = 12 \pm 0,1\text{cm}$ . Bereken de maximale fout op het volume.

⊙ **6.15.** (Labo C6) Bereken  $\frac{dz}{dt}$  voor de volgende functies.

$$z = r^2(1 - \cos \theta), \quad r(t) = 1 + t^3, \quad \theta(t) = \sqrt{1 + t^2}$$

⊙ **6.16.** (Labo C6) Bereken  $\frac{\partial z}{\partial s}$  en  $\frac{\partial z}{\partial t}$ .

$$z = \sin(xy^2) - x^2y, \quad x(s, t) = s^2 - st, \quad y(s, t) = s^2t^2.$$

⊗ **6.17.** Bereken de totale afgeleide van de functie  $z$  naar de veranderlijke  $t$ , als

$$z = x^2 + 3xy + 5y^2, \quad x = \sin t, \quad y = \cos t.$$

⊗ **6.18.** Zelfde vraag voor

$$z = \ln(x^2 + y^2), \quad x = e^{-t}, \quad y = e^t.$$

⊗ **6.19.** Bereken de totale afgeleide van  $z$  naar  $x$  als

$$z = x^2 + 2xy + y^2, \quad y = e^x.$$

⊗ **6.20.** Beschouw de functies

$$z = x^2 + xy + y^2, \quad x = 2r + s, \quad y = r - 2s.$$

Bereken de partiële afgeleiden van  $z$  ten opzichte van de veranderlijken  $r$  en  $s$ .

⊗ **6.21.** Zelfde vraag voor de functies

$$u = x^2 + y^2, \quad x = r \cos s, \quad y = r \sin s.$$

⊙ **6.22.** (Labo C6) Bij een gesloten cilinder met  $r = 6\text{cm}$  en  $h = 8\text{cm}$  neemt de straal  $r$  toe met een snelheid van  $0,2\text{cm/s}$ , terwijl de hoogte  $h$  afneemt met een snelheid van  $0,4\text{cm/s}$ . Hoe snel verandert op dat ogenblik

- het volume;
- de oppervlakte.

☆ **6.23.** Bij een attractie in een pretpark gebruikt men een cilindervormig rubberbootje met straal  $R = 0,5\text{m}$  en lengte  $L = 3\text{m}$ . Na een ongeval raakt het bootje lek en begint de lucht weg te stromen met een debiet van  $1500\text{cm}^3/\text{s}$ . De lengte van het bootje vermindert daarbij met een snelheid van  $0,1\text{cm/s}$ . Bepaal de snelheid waarmee de straal van het bootje verandert.

☆ **6.24.** Een hond wandelt aan een leiband, en bevindt zich 3 meter noordelijk en 4 meter oostelijk van zijn baasje. De hond loopt naar het noorden met een snelheid van  $1\text{m/s}$ , terwijl het baasje stilstaat en de leiband inkort met een snelheid van  $1\text{m/s}$ . Met welke snelheid loopt de hond naar het westen als de leiband steeds gespannen blijft?

☆ **6.25.** Op de middag vertrekt een schip uit punt  $A$ . Het vaart oostwaarts aan een snelheid van  $40\text{ km/u}$ . Eén uur later vertrekt een tweede schip vanuit hetzelfde punt  $A$ . Dit schip vaart noordwaarts aan een snelheid van  $60\text{ km/u}$ . Bereken de snelheid waarmee de schepen zich van elkaar verwijderen om  $14.00\text{ u}$ .

## Oplossingen - Solutions

6.1.

$$f'(x) = 2x + 3a, \quad g'(y) = 3a + 14y.$$

6.2.

1.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 4y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -4x + 6y,$
2.  $\frac{\partial z}{\partial x} = -4 \sin 4x - 2 \cos(2x + 3y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3 \cos(2x + 3y),$
3.  $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{y^2+xy}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = (2y + x)e^{y^2+xy},$
4.  $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -4,$
5.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy \cos y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x(\cos y^2 - 2y^2 \sin y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y \sin y^2,$
6.  $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin \sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x^2 \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xy \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

6.3.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x + 2y}{x^2 + xy + y^2}.$$

6.4.

125

6.5.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= yz, & \frac{\partial f}{\partial y} &= xz, & \frac{\partial f}{\partial z} &= xy, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0, & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = y, & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = x. \end{aligned}$$

6.6.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x(2y + 3z) + 3y^2 + z^2 - yz}{xy - 3x^2 + 4y^2 - 2z(x - 2y)}$$

6.7.

$$df = (2xy^4)dx + (4x^2y^3)dy = 2xy^3(ydx + 2xdy),$$

$$df = e^{\sqrt{x}} \left( \frac{\cos y}{2\sqrt{x}} dx - \sin y dy \right).$$

6.8.

$$dx - 2dy$$

6.9.

1.  $dz = (4x - 3y)dx + (-3x + 8y)dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 8$
2.  $dz = (4x - 5y)dx + (-5x + 2y)dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$
3.  $dz = \left(\frac{2x}{y} - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \left(\frac{2y}{x} - \frac{x^2}{y^2}\right)dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{y} + \frac{2y^2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} - \frac{2y}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x} + \frac{2x^2}{y^3}$
4.  $dz = \left(\frac{1}{y^2} + \frac{2y}{x^3}\right)dx - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^3}\right)dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{6y}{x^4}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}$
5.  $dz = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$
6.  $df = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(xdx + ydy + zdz)$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$   
 $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$

7.  $df = yzdx + xzdy + xydz$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

8.  $dz = \cos(2x + 3y)(2dx + 3dy)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4 \sin(2x + 3y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6 \sin(2x + 3y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -9 \sin(2x + 3y)$$

9.  $dz = 3 \cos 3x \cos 4y dx - 4 \sin 3x \sin 4y dy$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -9 \sin 3x \cos 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -12 \cos 3x \sin 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -16 \sin 3x \cos 4y$$

10.  $dz = \cos(x - vt)(dx - vdt - tdv)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin(x - vt), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial v} = t \sin(x - vt), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = v \sin(x - vt),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -t^2 \sin(x - vt), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial t} = -\cos(x - vt) - tv \sin(x - vt),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -v^2 \sin(x - vt)$$

11.  $dz = e^{x^2+3xy}((2x+3y)dx + 3xdy)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{x^2+3xy}(4x^2 + 12xy + 9y^2 + 2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{x^2+3xy}(6x^2 + 9xy + 3),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2+3xy}9x^2$$

12.  $dz = \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

## 6.10.

$$1. \quad dz = 2 \cos(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4x^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4y^2 \sin(x^2 + y^2) + 2 \cos(x^2 + y^2)$$

$$2. \quad dz = \frac{3x^3 + 6x^2y + 1}{x} dx + \frac{3x^2y + 1}{y} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6x^3 + 6x^2y - 1}{x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2}$$

$$3. \quad dz = \cos(xy)(ydx + xdy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \sin(xy) + \cos(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \sin(xy)$$

$$4. \quad dz = \frac{ydx + xdy}{2\sqrt{xy}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y}{4x\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x}{4y\sqrt{xy}}$$

$$5. \quad dz = \cos x \sin y dx + \sin x \cos y dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y$$

$$6. \quad dz = -\sin(xy)(ydx + xdy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \cos(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy \cos(xy) - \sin(xy), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x^2 \cos(xy)$$

$$7. \quad dz = \frac{2(xdx + ydy)}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$8. \quad dz = (3x^2 \cos \frac{y}{x} + xy \sin \frac{y}{x}) dx - x^2 \sin \frac{y}{x} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{6x^2 - y^2}{x} \cos \frac{y}{x} + 4y \sin \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = y \cos \frac{y}{x} - 2x \sin \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -x \cos \frac{y}{x}$$

$$9. \quad dz = (2x \sin \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y} \cos \frac{x}{y}) dx - \frac{x^3}{y^2} \cos \frac{x}{y} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2y^2 - x^2}{y^2} \sin \frac{x}{y} + \frac{4x}{y} \cos \frac{x}{y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^3}{y^3} \sin \frac{x}{y} - \frac{3x^2}{y^2} \cos \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^4}{y^4} \sin \frac{x}{y} + \frac{2x^3}{y^3} \cos \frac{x}{y}$$

10.  $dz = \frac{y^3}{x^2} \sin \frac{y}{x} dx + (2y \cos \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x} \sin \frac{y}{x}) dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^4}{x^4} \cos \frac{y}{x} - \frac{2y^3}{x^3} \sin \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^3}{x^3} \cos \frac{y}{x} + \frac{3y^2}{x^2} \sin \frac{y}{x},$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = +\frac{2x^2 - y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} - \frac{4y}{x} \sin \frac{y}{x}$
11.  $dz = e^{xy} y \operatorname{tg} y dx + e^{xy} (x \operatorname{tg} y + \frac{1}{\cos^2 y}) dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xy} y^2 \operatorname{tg} y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{xy} (\operatorname{tg} y (xy + 1) + \frac{y}{\cos^2 y}),$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{xy} (x^2 \operatorname{tg} y + \frac{2x}{\cos^2 y} + \frac{2 \operatorname{tg} y}{\cos^2 y})$
12.  $dz = e^{x^2 y} (2xy dx + x^2 dy)$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y(1 + 2x^2 y) e^{x^2 y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x(1 + x^2 y) e^{x^2 y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^4 e^{x^2 y}$
13.  $dz = \frac{dx + dy}{x + y}$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x + y)^2}$
14.  $dz = y(1 + \ln x) dx + x \ln x dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y}{x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 + \ln x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$
15.  $dz = yx^{y-1} dx + x^y \ln x dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(y \ln x + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$
16.  $dz = \ln y x^{\ln y - 1} dx + \frac{\ln x}{y} x^{\ln y} dy$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \ln y (\ln y - 1) x^{\ln y - 2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{\ln y - 1} \frac{\ln x \ln y + 1}{y},$   
 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^{\ln y} \frac{\ln x (\ln x - 1)}{y^2}$



$$17. \quad dz = \cos(x^2 - 5y)(2xdx - 5dy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \cos(x^2 - 5y) - 4x^2 \sin(x^2 - 5y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10x \sin(x^2 - 5y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -25 \sin(x^2 - 5y)$$

$$18. \quad dz = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(y \ln x + 1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x$$

$$19. \quad dz = e^{x^2-5xy}((2x-5y)dx - 5x dy)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (4x^2 - 20xy + 25y^2 + 2)e^{x^2-5xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -5(2x^2 - 5xy + 1)e^{x^2-5xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 25x^2 e^{x^2-5xy}$$

$$20. \quad dz = \frac{y^{\operatorname{tg} x} \ln y}{\cos^2 x} dx + \operatorname{tg} x y^{\operatorname{tg} x-1} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{y^{\operatorname{tg} x} \ln y}{\cos^4 x} (\ln y + \sin 2x), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^{\operatorname{tg} x-1}}{\cos^2 x} (\operatorname{tg} x \ln y + 1),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) y^{\operatorname{tg} x-2}$$

$$21. \quad dz = \sqrt{y} x^{\sqrt{y}-1} dx + \frac{x^{\sqrt{y}} \ln x}{2\sqrt{y}} dy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \sqrt{y}(\sqrt{y}-1)x^{\sqrt{y}-2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^{\sqrt{y}-1}(\sqrt{y} \ln x + 1)}{2\sqrt{y}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^{\sqrt{y}} \ln x (\sqrt{y} \ln x - 1)}{4y^{\frac{3}{2}}}$$

### 6.11.

$$1. \quad \frac{\partial}{\partial y} \left( \arcsin \sqrt{\frac{ye^x}{xe^y}} \right) = -\frac{y-1}{2} \sqrt{\frac{e^x}{y(xe^y - ye^x)}}$$

$$2. \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{ye^x - xe^y}{ye^x + xe^y}} \right) = \frac{e^y(x-1)}{2\sqrt{y^2 e^{2x} - x^2 e^{2y}}}$$

### 6.12. 0

### 6.13.

-125W

6.14.

$$8,5\pi\text{cm}^3$$

6.15.

$$\frac{df}{dt} = 6rt^2(1 - \cos \theta) + \frac{r^2 t \sin \theta}{\sqrt{1+t^2}}$$

6.16.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial s} &= (2s - t)(y^2 \cos(xy^2) - 2xy) + 2st^2(2xy \cos(xy^2) - x^2), \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -s(y^2 \cos(xy^2) - 2xy) + 2s^2t(2xy \cos(xy^2) - x^2).\end{aligned}$$

6.17.

$$\frac{dz}{dt} = (2x + 3y) \cos t - (3x + 10y) \sin t = -3 \sin^2 t - 8 \sin t \cos t + 3 \cos^2 t$$

6.18.

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2x}{x^2 + y^2} e^{-t} + \frac{2y}{x^2 + y^2} e^t = 2 \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{e^{2t} + e^{-2t}}$$

6.19.

$$\frac{dz}{dt} = (2x + 2y) + (2x + 2y)e^x = 2(x + e^x)(1 + e^x)$$

6.20.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial r} &= (2x + y) \cdot 2 + (x + 2y) \cdot 1 = 14r - 3s, \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= (2x + y) \cdot 1 + (x + 2y) \cdot (-2) = -3r + 6s,\end{aligned}$$

6.21.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= (2x \cdot \cos s + (2y) \cdot \sin s) = 2r, \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= (2x \cdot (-r \sin s) + 2y \cdot (r \cos s)) = 0,\end{aligned}$$

6.22.

$$4,8\pi \frac{\text{cm}^3}{s}, \quad 3,2\pi \frac{\text{cm}^2}{s}$$

6.23.  $R' = 250\pi - 1500/30000\pi \sim -0,0076\text{cm/s}$

6.24. 2m/s

6.25. 68km/u



# HOOFDSTUK 7

## BELANGRIJKE STELLINGEN

© 7.1. (Labo C6) Bereken de volgende limieten.

$$1. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x - \sin x}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + 5}{x + e^x}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{2} x \right)$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin x}$$

☼☼ **7.2.** Bereken de volgende limieten.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\ln x}$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 e^{-x^2}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$

7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x)$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - 3x)^{\frac{1}{x}}$

12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x)^{\frac{1}{x}}$

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x}$

☆ **7.3.** Bereken de volgende limieten.

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 4x + 8}{4x^3 - 3x^2 + 6}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 4} \left( \frac{x^3 - 6x^2 + 32}{x^3 - 10x^2 + 32x - 32} \right)$
4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 2x^3 + 2x - 1}{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^4}{1 + x + x^2 + x^3}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sin x}$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{(\arcsin x)^2}$
9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{4}{3}}}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg}(2x)}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \ln x$
12.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - 3x^2}{1 - 4x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
15.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left( \frac{\sin^2(3x)}{(\frac{\pi}{3} - x)^2} \right)$
16.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x^2} - \frac{2}{1 - \cos x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1}{x^4 e^x}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$
20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + e^x}{x e^x}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 4x)}{x}$
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^x$
23.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}$
24.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - e^{-x})^{e^x}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + 2x^2}{1 - 2x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}}$
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 + x}{1 - x} \right)^{\frac{1}{x}}$
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$
29.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x$
30.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x^2}}$
31.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left( \frac{\cos^2(2x)}{(\frac{\pi}{4} - x)^2} \right)$
32.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 4x)^{\frac{1}{x}}$

**Oplossingen - Solutions****7.1.**

- |    |                |     |                  |
|----|----------------|-----|------------------|
| 1. | $\frac{1}{12}$ | 6.  | 1                |
| 2. | -2             | 7.  | $-\frac{2}{\pi}$ |
| 3. | $\infty$       | 8.  | 1                |
| 4. | 0              | 9.  | $\frac{1}{e}$    |
| 5. | 1              | 10. | 1                |

**7.2.**

- |    |             |     |          |
|----|-------------|-----|----------|
| 1. | 2           | 8.  | 0        |
| 2. | 2           | 9.  | 1        |
| 3. | $+\infty$   | 10. | 1        |
| 4. | $+\infty$   | 11. | $e^{-2}$ |
| 5. | 0           | 12. | $e$      |
| 6. | $\pm\infty$ | 13. | 1        |
| 7. | $+\infty$   | 14. | 1        |



## 7.3.

- |     |                |     |                    |
|-----|----------------|-----|--------------------|
| 1.  | $\frac{1}{4}$  | 17. | $-\frac{1}{3}$     |
| 2.  | $\frac{4}{3}$  | 18. | $\frac{1}{24}$     |
| 3.  | 3              | 19. | 0                  |
| 4.  | $\frac{2}{3}$  | 20. | 0                  |
| 5.  | 0              | 21. | 4                  |
| 6.  | 1              | 22. | 1                  |
| 7.  | $+\infty$      | 23. | $e$                |
| 8.  | 1              | 24. | $e^{-1}$           |
| 9.  | 0              | 25. | $e^4$              |
| 10. | $\frac{1}{2}$  | 26. | $e^2$              |
| 11. | 0              | 27. | 1                  |
| 12. | $+\infty$      | 28. | $e^{-\frac{1}{2}}$ |
| 13. | $-\frac{1}{4}$ | 29. | $e^2$              |
| 14. | $e$            | 30. | 1                  |
| 15. | 9              | 31. | 4                  |
| 16. | $-\frac{1}{4}$ | 32. | $e^{-4}$           |



# HOOFDSTUK 8

## DE FORMULE VAN TAYLOR-MACLAURIN

- ⊗ **8.1.** Bereken  $P_6(x)$  voor de functies  $f(x) = \cos(x)$  en  $f(x) = e^x$ . Stel hierbij  $a = 0$ .
- ⊗ **8.2.** Bereken de veeltermen  $P_6(x)$  voor  $f(x) = \sin(x)$  en  $f(x) = \cos(x)$  wanneer je  $a = \frac{\pi}{3}$  stelt.
- ⊗⊗ **8.3.** Bereken  $\cos(\frac{\pi}{4})$  met behulp van  $P_4(x)$ . Hoe nauwkeurig is deze berekening?
- ⊗⊗ **8.4.** Bereken  $e$  op vijf decimalen nauwkeurig.
- ⊗⊗ **8.5.** Bereken  $\sqrt{101}$  op drie decimalen nauwkeurig.
- ⊗⊗ **8.6.** Bereken de reeksontwikkeling van Taylor voor de functie  $y = \ln x$  rond het punt  $a = 1$ .

- ☼☼ **8.7.** Bereken de reeksontwikkeling van Taylor voor de functie  $f(x) = \sin(x)$  rond het punt  $a = \frac{\pi}{3}$ . Bereken hiermee de sinus van een hoek van 62 graden.

- ☆ **8.8.** Bereken de eerste twee termen uit de Taylorontwikkeling van de functie

$$f(x) = \sqrt{x}$$

rond het punt  $a = 100$ . Bereken met behulp van deze reeks de benaderde waarde van  $\sqrt{105}$  en schat de fout die je met deze benadering maakt.

- ☆ **8.9.** Bereken de eerste zes termen ( $P_5(x)$ ) van de MacLaurin-reeks van de functie

$$f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Bereken met behulp van deze reeks de benaderde waarde van  $\operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$ .

- ☆ **8.10.** Bereken de eerste vier termen ( $P_3(x)$ ) van de Taylorreeks van de functie

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

rond het punt  $a = 27$ . Bereken met behulp van deze reeks de benaderde waarde van  $\sqrt[3]{30}$ . Bepaal de maximale fout op deze benaderde waarde met behulp van de restterm  $R_3(x)$ .

- ☆ **8.11.** Bereken de eerste vijf termen ( $P_4(x)$ ) van de MacLaurin-reeks van de functie

$$f(x) = \ln(x + 1).$$

Bereken met behulp van deze reeks de benaderde waarde van  $\ln(2)$ . Bepaal de maximale fout op deze benaderde waarde met behulp van de restterm  $R_4(x)$ .

- ☆ **8.12.** Bereken met behulp van de Taylor-veelterm  $P_4(x)$  rond het punt  $a = 0$  (de eerste vijf termen uit de Taylorreeks) een benaderde waarde voor  $\cos(\frac{\pi}{20})$ . Bereken, met behulp van de restterm  $R_4(x)$ , de nauwkeurigheid van dit resultaat.

## Oplossingen - Solutions

8.1.

$$P_6(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720},$$

$$P_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}$$

8.2.

$$P_6(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 - \frac{\sqrt{3}}{1440}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6,$$

$$P_6(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3$$

$$+ \frac{1}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 - \frac{\sqrt{3}}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 - \frac{1}{1440}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6$$

8.3.

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}, \quad R_4(x) = -\sin(x_0) \frac{x^5}{120}, \quad x_0 \in ]0, x[,$$

$$P_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707429, \quad |R_4\left(\frac{\pi}{4}\right)| < 0,0025,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707107$$

8.4.

$$P_8(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40320},$$

$$R_8(x) = e^{x_0} \frac{x^9}{362880}, \quad x_0 \in ]0, x[,$$

$$P_8(1) = 2,718279, \quad |R_8(1)| < 0,000008,$$

$$e^1 = e = 2,718281$$

8.5.

$$a = 100, \quad P_1(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100),$$

$$R_1(x) = -\frac{1}{8x_0^{\frac{3}{2}}}(x - 100)^2, \quad x_0 \in ]100, x[,$$

$$P_1(101) = 10,05, \quad |R_1(101)| < 0,000125,$$

$$\sqrt{101} = 10,0499$$

8.6.

$$\ln x = (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + \frac{(x - 1)^3}{3} - \frac{(x - 1)^4}{4} + \dots$$

8.7.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 \\ &\quad + \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \frac{1}{240}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5 - \frac{\sqrt{3}}{1440}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^6, \\ \sin(62^\circ) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{\sqrt{3}}{48}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4 + \dots \\ &= 0,88294759 \end{aligned}$$

8.8.

$$\begin{aligned} a &= 100, \quad P_1(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100), \\ R_1(x) &= -\frac{1}{8x_0^{\frac{3}{2}}}(x - 100)^2, \quad x_0 \in ]100, x[, \\ P_1(105) &= 10,25, \quad |R_1(105)| < 0,003125, \\ \sqrt{101} &= 10,24695 \end{aligned}$$

8.9.

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}, \quad P_5(1) = 0,86667$$

8.10.

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 3 + \frac{1}{27}(x - 27) - \frac{1}{2187}(x - 27)^2 + \frac{5}{531441}(x - 27)^3, \\ R_3(x) &= -\frac{10}{243x_0^{\frac{4}{3}}}(x - 27)^4, \quad x_0 \in ]27, x[, \\ P_3(30) &= 3,1072499, \quad |R_3(30)| < 0,00002, \\ \sqrt[3]{30} &= 3,1072325 \end{aligned}$$

8.11.

$$P_x(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$
$$R_4(x) = \frac{x^5}{5(1+x_0)^5}, \quad x_0 \in ]0, x[,$$
$$P_4(1) = 0,583, \quad |R_4(1)| < 0,2,$$
$$\ln 2 = 0,693$$

8.12.

$$P_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$
$$R_4(x) = \frac{-\sin x_0}{120}x^5, \quad x_0 \in ]0, x[,$$
$$P_4\left(\frac{\pi}{20}\right) = 0,9876883615, \quad |R_4\left(\frac{\pi}{20}\right)| < 0,0000008,$$
$$\cos \frac{\pi}{20} = 0,9876883406$$





# HOOFDSTUK 9

## COMPLEXE GETALLEN

► **9.1.** Stel de volgende complexe getallen grafisch voor.

$$4, \quad 2j, \quad -3, \quad -5j, \quad 1 - j, \quad -3 + 2j, \quad -1 - 3j, \quad 4 + 2j$$

► **9.2.** Bereken.

1.  $(1 + j) + 2$

2.  $1 + (1 + j)$

3.  $2(1 + j)$

4.  $j \cdot j$

5.  $j(1 + j)$

© **9.3.** (Labo C7) Bereken.

1.  $(-3 + 5j) + (3 - 2j)$

2.  $(2 + j)(3 - j)$

3.  $(-2 + 3j)(-2 - 3j)$

4.  $(3 + 4j)^2$

5.  $(\frac{1}{3} - j)(\frac{1}{3} + j)(2 - 3j)$

6.  $j^7$

7.  $(4 - 7j)^3$

8.  $\frac{4 - j}{2 + 3j}$

9.  $\frac{2 - 3j}{1 + 2j} + \frac{1 - 2j}{2 + 5j}$

10.  $\frac{-2}{-\sqrt{3} + j}$

⊗ **9.4.** Bereken of vereenvoudig volgende uitdrukkingen. Stel de resultaten grafisch voor.

- |  |   |   |
|--|---|---|
| 1. $(-7 + 3j) + (2 - j)$                 | 8. $(\frac{1}{2} - j)(\frac{1}{2} + j)(\overline{1 + j})$ | 15. $(1 + 2j)^{-1}$   |
| 2. $(3 + 2j) + (3 - 2j)$                 | 9. $(2 + 3j)^2$   | 16. $\frac{3}{2 - j}$                                       |
| 3. $j + \overline{(1 + 2j)}$             | 10. $(1 - 3j)^3$  | 17. $\frac{2 + j}{3 + 4j}$                                  |
| 4. $(-2 + \sqrt{2}j) - (-2 + \sqrt{2}j)$ | 11. $(2 - j)^4$   | 18. $\frac{(2 - 3j)(3 + 4j)}{(6 + 4j)(\overline{15 + 8j})}$ |
| 5. $(3 - 2j)(2 + 3j)$                    | 12. $j^3$   | 19. $\frac{-3j\sqrt{8}}{8j^3\sqrt{3}}$                      |
| 6. $(1 - j)(1 + j)$                      | 13. $j^5$   | 20. $\frac{1 + 2j}{3 - 2j} + \frac{3 + 2j}{1 - 2j}$         |
| 7. $j(2 + j)$                            | 14. $j^{35}$  |   |

► **9.5.** Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

1.  $x^2 + x - 2 = 0$
2.  $x^2 + 16 = 0$
3.  $x^2 - 2x + 2 = 0$

⊙ **9.6.** (Labo C7) Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

1.  $x^2 + 9 = 0$
2.  $x^2 - 3x + 5 = 0$
3.  $x^2 - (2 + 3j)x - 1 + 3j = 0$
4.  $x^3 + 3x^2 + 4x - 8 = 0$
5.  $x^4 - 16 = 0$

⊗ **9.7.** Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - 30x + 289 = 0$     | 3. $x^3 + jx^2 + x + j = 0$ |
| 2. $x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = 0$ | 4. $x^4 - 1 = 0$            |

► **9.8.** Bepaal de grafische voorstelling van de volgende complexe getallen. Leid uit deze voorstelling de modulus en het argument van deze getallen af.

- |            |             |                 |
|------------|-------------|-----------------|
| 1. $z = 5$ | 3. $z = -2$ | 5. $z = 1 + j$  |
| 2. $z = j$ | 4. $z = -j$ | 6. $z = -1 - j$ |

⊙ **9.9.** (Labo C7) Bepaal de goniometrische en exponentiële vorm van de volgende complexe getallen.

1.  $6\sqrt{3} + 6j$
2.  $-3 - 4j$
3.  $2 - 2j$

⊙ **9.10.** (Labo C7) Bereken met behulp van de rekenregels, de exponentiële voorstelling en de goniometrische voorstelling.

$$(3 - 3\sqrt{3}j)(-2 - 2\sqrt{3}j)$$

⊙ **9.11.** (Labo C7) Bepaal met de formule van de Moivre.

1.  $(\sqrt{3} + j)^3$
2.  $(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j)^4$
3.  $\sqrt[3]{-1}$
4.  $\sqrt[4]{2(-1 + j)}$
5.  $\sqrt[3]{\sqrt{3} - j}$

⊗⊗ **9.12.** Bepaal de goniometrische en de exponentiële vorm van volgende complexe getallen. Bereken het kwadraat, de derde, vierde en tiende macht van deze complexe getallen. Bereken eveneens de vierkantswortels en de derdemachtswortels uit de complexe getallen.

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\sqrt{3} + j$                              | 4. $2(j - 1)$                           |
| 2. $\sqrt{3} - j$                              | 5. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$ |
| 3. $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j$ | 6. $1 - \sqrt{3}j$                      |

⊗ **9.13.** Bereken de vierkantswortels, de derdemachtswortels en de vierdemachtswortels uit de complexe getallen

$$1, \quad -1, \quad j, \quad -j$$

⊙ **9.14.** (Labo C7) Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

$$x^2 + (3 - 2j)x - 5j = 0$$

☞☞ 9.15. Los de volgende veeltermvergelijkingen op.

- |                            |   |
|----------------------------|---|
| 1. $x^3 - 1 = 0$           | 4. $x^5 + \sqrt{32} + \sqrt{32}j = 0$                       |
| 2. $x^4 - 30x^2 + 289 = 0$ | 5. $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$ ( <i>Hint</i> : $2j$ ) |
| 3. $x^4 + 1 = 0$           | 6. $x^3 + 9x - 26 = 0$                                      |

☆ 9.16. Bepaal alle (complexe) oplossingen van de volgende vergelijkingen.

- |                                    |                                      |   |
|------------------------------------|--------------------------------------|---|
| 1. $x^2 = 1 + j\sqrt{3}$           | 7. $x^3 = (1 + j)^{30}$              | 13. $z^4 - 4\sqrt{3}jz^2 - 16 = 0$            |
| 2. $x^2 + 2x + 1 - j = 0$          | 8. $z^4 + 4 = 0$                     | 14. $z^5 - \frac{4096}{(\sqrt{3} + j)^7} = 0$ |
| 3. $x^2 + 4jx - 5 + \sqrt{3}j = 0$ | 9. $x^4 - 2x^2 + 4 = 0$              | 15. $x^6 = (1 + \sqrt{3}j)^{30}$              |
| 4. $z^2 + 2jz + j = 0$             | 10. $x^4 + x^2 + 1 = 0$              | 16. $z^6 + 64 = 0$                            |
| 5. $z^3 = j^{17}$                  | 11. $z^4 - 8z^2 + 64 = 0$            | 17. $z^6 - 64 = 0$                            |
| 6. $x^3 = (1 - j)^{20}$            | 12. $z^4 - 16\sqrt{3}jz^2 - 256 = 0$ |   |

☆ 9.17. Bepaal de goniometrische en exponentiële schrijfwijze van het complexe getal

$$z = 1 - i\sqrt{3}.$$

Bepaal de vierkantswortels uit dit getal en de derde macht ervan.

☆ 9.18. Bepaal de goniometrische en exponentiële schrijfwijze van het complexe getal

$$z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}j.$$

Bepaal de vierkantswortels uit dit getal en de derde macht ervan.

☆ 9.19. Bepaal de algebraïsche vorm van het complex getal  $(1-j)^7$ . Bepaal alle complexe oplossingen  $a + bj$  van de vergelijking

$$x^2 - (1 - j)^7x + 16j = 0.$$

☆ 9.20. Bepaal de algebraïsche vorm van het complex getal

$$(2 + 2\sqrt{3}j)^7.$$

Bepaal alle complexe oplossingen  $a + bj$  van de vergelijking

$$z^2 = (2 + 2\sqrt{3}j)^7.$$

- ☆ **9.21.** Bepaal de goniometrische vorm van het complexe getal  $z = 1 - j$ . Bepaal vervolgens de algebraïsche vorm van het complex getal  $(1 - j)^9$ .
- ☆ **9.22.** Bepaal de goniometrische vorm van het complexe getal  $1 + j$ . Bepaal vervolgens de algebraïsche vorm van alle derdemachtswortels van het complex getal  $(1 + j)^6$ .
- ☆ **9.23.** Bepaal de goniometrische vorm van het complexe getal  $z = 1 + j\sqrt{3}$ . Bepaal vervolgens de algebraïsche vorm van het complex getal  $(1 + j\sqrt{3})^9$ . Bereken tenslotte de vierdemachtswortels uit  $(1 + j\sqrt{3})^9$ .

- ☆ **9.24.** Bepaal de goniometrische vorm van de complexe getallen

$$z_1 = 1 + j, \quad z_2 = \sqrt{2} - \sqrt{6}j.$$

Bereken vervolgens de (complexe) oplossingen van de vergelijking

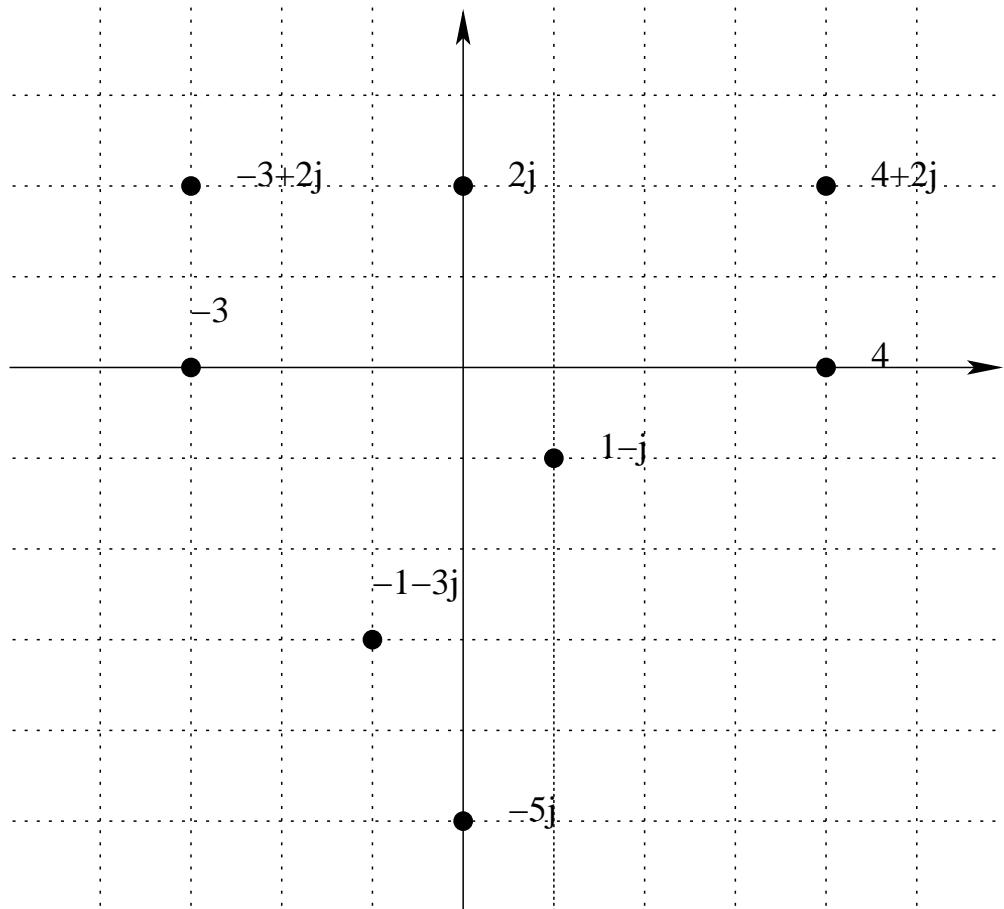
$$z^3 = \frac{z_1^7}{z_2^3}.$$

- ☆ **9.25.** Bepaal de goniometrische vorm van het complexe getal  $z_1 = -1 + j$ . Bereken vervolgens alle (complexe) oplossingen  $a + bj$  van de vergelijking  $z^5 = z_1^7$ .

- ☆ **9.26.** Bereken (de algebraïsche vorm  $a + bj$  van) alle *derdemachtswortels* van  $z = (-3 + \sqrt{3}j)^{14}$ .

## Oplossingen - Solutions

9.1.



Figuur 6.

9.2.

1.  $3 + j$
2.  $2 + j$
3.  $2 + 2j$
4.  $-1$
5.  $-1 + j$

9.3.

- |               |                                   |                              |
|---------------|-----------------------------------|------------------------------|
| 1. $3j$       | 5. $\frac{20}{9} - \frac{10}{3}j$ | 8. $\frac{5 - 14j}{13}$      |
| 2. $7 + j$    | 6. $-j$                           | 9. $\frac{-156 - 248j}{145}$ |
| 3. $13$       | 7. $-524 + 7j$                    | 10. $\frac{\sqrt{3} + j}{2}$ |
| 4. $-7 + 24j$ |                                   |                              |

## 9.4.

- |    |           |     |                              |     |                                    |
|----|-----------|-----|------------------------------|-----|------------------------------------|
| 1. | $-5 + 2j$ | 8.  | $\frac{5}{4} - \frac{5}{4}j$ | 15. | $\frac{1}{5} - \frac{2}{5}j$       |
| 2. | 6         | 9.  | $-5 + 12j$                   | 16. | $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}j$       |
| 3. | $1 - j$   | 10. | $-26 + 18j$                  | 17. | $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}j$       |
| 4. | 0         | 11. | $-7 - 24j$                   | 18. | $\frac{42}{289} - \frac{13}{578}j$ |
| 5. | $12 + 5j$ | 12. | $-j$                         | 19. | $\frac{\sqrt{6}}{4}$               |
| 6. | 2         | 13. | $j$                          | 20. | $\frac{-18}{65} + \frac{144}{65}j$ |
| 7. | $-1 + 2j$ | 14. | $-j$                         |     |                                    |

## 9.5.

1. 1,  $-2$
2.  $\pm 4j$
3.  $1 \pm j$

## 9.6.

1.  $\pm 3j$
2.  $\frac{3 \pm \sqrt{11}j}{2}$
3.  $1 + 2j, 1 + j$
4.  $1, -2 \pm 2j$
5.  $\pm 2, \pm 2j$

## 9.7.

- |    |              |    |                |
|----|--------------|----|----------------|
| 1. | $15 \pm 8j$  | 3. | $\pm j$        |
| 2. | $1; 2 \pm j$ | 4. | $\pm 1, \pm j$ |

## 9.8.

- |    |                                 |    |                                  |    |   |
|----|---------------------------------|----|----------------------------------|----|---|
| 1. | $r = 5, \theta = 0$             | 3. | $r = 2, \theta = \pi$            | 5. | $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$  |
| 2. | $r = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$ | 4. | $r = 1, \theta = \frac{3\pi}{2}$ | 6. | $r = \sqrt{2}, \theta = \frac{5\pi}{4}$ |

## 9.9.

1.  $12(\cos \frac{\pi}{6} + j \sin \frac{\pi}{6}) = 12e^{\frac{\pi}{6}j}$
2.  $5(\cos 1, 295\pi + j \sin 1, 295\pi) = 5e^{1,295\pi j}$
3.  $2\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + j \sin \frac{7\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}j}$

**9.10.**

-24

**9.11.**

1.  $8(\cos \frac{\pi}{2} + j \sin \frac{\pi}{2}) = 8j$
2.  $\cos \frac{8\pi}{3} + j \sin \frac{8\pi}{3}$
3.  $\cos \frac{\pi}{3} + j \sin \frac{\pi}{3}, \quad \cos \pi + j \sin \pi, \quad \cos \frac{5\pi}{3} + j \sin \frac{5\pi}{3}$
4.  $\sqrt[8]{8}(\cos \frac{3\pi}{16} + j \sin \frac{3\pi}{16}), \quad \sqrt[8]{8}(\cos \frac{11\pi}{16} + j \sin \frac{11\pi}{16}),$   
 $\sqrt[8]{8}(\cos \frac{19\pi}{16} + j \sin \frac{19\pi}{16}), \quad \sqrt[8]{8}(\cos \frac{27\pi}{16} + j \sin \frac{27\pi}{16})$
5.  $\sqrt[3]{2}(\cos \frac{11\pi}{18} + j \sin \frac{11\pi}{18}), \quad \sqrt[3]{2}(\cos \frac{23\pi}{18} + j \sin \frac{23\pi}{18}), \quad \sqrt[3]{2}(\cos \frac{35\pi}{18} + j \sin \frac{35\pi}{18})$



## 9.12.

1.  $\sqrt{3} + j = 2e^{j\frac{\pi}{6}}$   
 $z^2 = 2 + 2\sqrt{3}j; z^3 = 8j; z^4 = -8 + 8\sqrt{3}j; z^{10} = 512 - 512\sqrt{3}j$   
 $z^{\frac{1}{2}} = \pm(1, 37 + 0, 37j)$   
 $z^{\frac{1}{3}} = 1, 24 + 0, 22j; -0, 81 + 0, 97j; -0, 43 - 1, 18j$
2.  $\sqrt{3} - j = 2e^{j\frac{11\pi}{6}}$   
 $z^2 = 2 - 2\sqrt{3}j; z^3 = -8j; z^4 = -8 - 8\sqrt{3}j; z^{10} = 512 + 512\sqrt{3}j$   
 $z^{\frac{1}{2}} = \pm(1, 37 - 0, 37j)$   
 $z^{\frac{1}{3}} = 1, 24 - 0, 22j; -0, 81 - 0, 97j; -0, 43 + 1, 18j$
3.  $-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j = e^{j\frac{5\pi}{4}}$   
 $z^2 = j; z^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j; z^4 = -1; z^{10} = j$   
 $z^{\frac{1}{2}} = \pm(0, 38 - 0, 92j)$   
 $z^{\frac{1}{3}} = 0, 71 - 0, 71j; 0, 26 + 0, 97j; -0, 97 - 0, 26j$
4.  $2(j - 1) = 2\sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}$   
 $z^2 = -8j; z^3 = 16 + 16j; z^4 = -64; z^{10} = -32768j$   
 $z^{\frac{1}{2}} = \pm(, 64 + 1, 55j)$   
 $z^{\frac{1}{3}} = -1, 37 + 0, 37j; 0, 37 - 1, 37j; 1 + j$
5.  $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j = e^{j\frac{2\pi}{3}}$   
 $z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}j; z^3 = 1; z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j; z^{10} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}j$   
 $z^{\frac{1}{2}} = \pm(0, 5 + 0, 87j)$   
 $z^{\frac{1}{3}} = 0, 77 + 0, 64j; -0, 94 + 0, 34j; 0, 17 - 0, 98j$
6.  $1 - \sqrt{3}j = 2e^{j\frac{5\pi}{3}}$   
 $z^2 = -2 - 2\sqrt{3}j; z^3 = -8; z^4 = -8 + 8\sqrt{3}j; z^{10} = -512 + 512\sqrt{3}j$   
 $z^{\frac{1}{2}} = \pm(1, 22 - 0, 71j)$   
 $z^{\frac{1}{3}} = 1, 18 - 0, 43j; -0, 97 - 0, 81j; -0, 22 + 1, 24j$

## 9.13.

$$\begin{aligned}
z = 1 \quad |z| = 1, \quad \theta = 0 \\
z^{\frac{1}{2}} = \pm 1 \\
z^{\frac{1}{3}} = 1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j \\
z^{\frac{1}{4}} = \pm 1; \pm j \\
z = -1 \quad |z| = 1, \quad \theta = \pi \\
z^{\frac{1}{2}} = \pm j \\
z^{\frac{1}{3}} = -1; \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j \\
z^{\frac{1}{4}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j \\
z = j \quad |z| = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \\
z^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \\
z^{\frac{1}{3}} = -j; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j \\
z^{\frac{1}{4}} = \pm(0,92 + 0,38j); \pm(0,38 - 0,92j) \\
z = -j \quad |z| = 1, \quad \theta = \frac{3\pi}{2} \\
z^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}j\right) \\
z^{\frac{1}{3}} = j; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j \\
z^{\frac{1}{4}} = \pm(0,92 - 0,38j); \pm(0,38 + 0,92j)
\end{aligned}$$

## 9.14.

$$\frac{-3 + 2j + \sqrt[4]{89}(\cos 0,16\pi + j \sin 0,16\pi)}{2}, \quad \frac{-3 + 2j + \sqrt[4]{89}(\cos 1,16\pi + j \sin 1,16\pi)}{2}$$

## 9.15.

1.  $1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$
2.  $\pm 4 \pm j$
3.  $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}j$
4.  $1,35 - 0,69j; 1,07 + 1,07j; -0,68 + 1,35j; -1,50 - 0,24j; -0,24 - 1,50j$
5.  $-1; -2; \pm 2j$
6.  $2; -1 \pm 2\sqrt{3}j$

9.16.

1.  $\pm (1, 22 + 0, 71j)$
2.  $-0, 29 + 0, 71j; -1, 71 - 0, 71j = 0$
3.  $1, 22 - 2, 71j; -1, 22 - 1, 29j$
4.  $0, 46 - 2, 10j; -0, 46 + 0, 10j$
5.  $-j; \pm 0, 87 + 0, 50j$
6.  $-10, 08; 5, 04 \pm 8, 73j$
7.  $32j; \pm 27, 71 - 16j$
8.  $\pm 1 \pm j$
9.  $\pm 1, 22 \pm 0, 71j$
10.  $\pm 0, 5 \pm 0, 87j$
11.  $\pm 2, 45 \pm 1, 41j$
12.  $\pm (2 + 3, 46j); \pm (3, 46 + 2j)$
13.  $\pm (1, 73 + j); \pm (1 + 1, 73j)$
14.  $-0, 42 + 1, 96j; -0, 81 - 1, 83j; 1, 73 + j; -1, 99 + 0, 21j; 1, 49 - 1, 34j$
15.  $\pm 32; \pm 16 \pm 27, 7j$
16.  $\pm 2j; \pm \sqrt{3} \pm j$
17.  $\pm 2; \pm 1 \pm \sqrt{3}j$

9.17.

$$z = 2e^{j\frac{5\pi}{3}}, \quad z^3 = -8, \quad z^{\frac{1}{2}} = \pm(1, 22 - 0, 71j)$$

9.18.

$$z = 4e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad z^3 = -32\sqrt{2} + 32\sqrt{2}j, \quad z^{\frac{1}{2}} = \pm(1, 85 + 0, 77j)$$

9.19.

$$8 + 8j; \quad 4 \pm 2\sqrt{2} + (4 \pm 2\sqrt{2})j$$

9.20.

$$2^{13} + 2^{13}\sqrt{3}j, \quad \pm(110, 9 + 64j)$$

9.21.

$$z = \sqrt{2}e^{j\frac{7\pi}{4}}, \quad 16 - 16j$$

**9.22.**

$$z = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad \pm 1, 73 - j; 2j$$

**9.23.**

$$z = 2e^{j\frac{\pi}{3}}, z^9 = -512, \quad \pm 3, 36 \pm 3, 36j$$

**9.24.**

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}, \\ z_2 &= 2\sqrt{2}e^{j\frac{5\pi}{3}}, \\ &0, 56 + 0, 56j; 0, 21 - 0, 77j; -0, 77 + 0, 21j \end{aligned}$$

**9.25.**

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}, \\ &1, 48 - 0, 74j; 1, 15 + 1, 15j; -0, 74 + 1, 48j; -1, 60 - 0, 25j; -0, 25 - 1, 60j \end{aligned}$$

**9.26.**

$$309, 8 - 112, 8j; -252, 5 - 211, 9j; -57, 2 + 324, 7j$$

# HOOFDSTUK 10

## ONBEPAAALDE INTEGRATIE

► **10.1.** Bereken de volgende onbepaalde integralen.

1.  $\int x^3 dx$

6.  $\int \frac{1}{x} dx$

2.  $\int 3x^2 + 2x + 5 dx$

7.  $\int \frac{1}{x^4} dx$

3.  $\int 6x^{\frac{1}{2}} dx$

8.  $\int \cos x - \sin x dx$

4.  $\int 60\sqrt[3]{x} dx$

9.  $\int 5^x dx$

5.  $\int 160\sqrt[5]{x^3} dx$

10.  $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x - 5} dx$

© **10.2.** (Labo C8) Bereken de volgende onbepaalde integralen (substitutiemethode).

- |   |   |
|---|---|
| 1. $\int \sin 2x dx$                        | 9. $\int \frac{\sin 8x}{9 + \sin^4 4x} dx$                      |
| 2. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$           | 10. $\int \frac{2x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx$                      |
| 3. $\int \frac{x}{x^2 + 1} dx$              | 11. $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$                                 |
| 4. $\int e^{-2x} dx$                        | 12. $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}} dx$ |
| 5. $\int (2x^2 + 3)^{\frac{1}{3}} x dx$     | 13. $\int (\sin 4x + \operatorname{tg}(1 - 2x)) dx$             |
| 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 - \sqrt{x})}$ | 14. $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$              |
| 7. $\int (\cos x - \sin x)^2 dx$            | 15. $\int \frac{x e^{-2x^2}}{3 - e^{-2x^2}} dx$                 |
| 8. $\int \frac{dx}{1 + \cos 3x}$            |   |

⊗ **10.3.** Bereken de volgende onbepaalde integralen.

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 1. $\int x^5 dx$              | 9. $\int \sqrt{1 + x^4} x^3 dx$                   |
| 2. $\int x^3 \sqrt{x} dx$     | 6. $\int \frac{1}{(2 - x)^3} dx$                  |
| 3. $\int \sqrt{x}(x - 1) dx$  | 7. $\int x \cos x^2 dx$                           |
| 4. $\int \frac{1}{2x - 3} dx$ | 8. $\int \cos^4 x \sin x dx$                      |
| 5. $\int \sqrt{2 - 3x} dx$    | 10. $\int \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 4}} dx$   |
|                               | 11. $\int \sin 4x + \operatorname{tg}(2x - 1) dx$ |
|                               | 12. $\int \frac{x e^{-2x^2}}{3 - e^{-2x^2}} dx$   |
|                               | 13. $\int \frac{\sin 2x}{(1 + \cos 2x)^2} dx$     |

© 10.4. (Labo C8) Bereken de volgende onbepaalde integralen (partiële integratie).

$$\begin{array}{ll}
 1. \int x \sin x dx & 6. \int \sin^2 x dx \\
 2. \int x^3 e^{x^2} dx & 7. \int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx \\
 3. \int \ln x dx & 8. \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx \\
 4. \int x^2 \sqrt{1-x} dx & 9. \int e^{2x} \cos 3x dx \\
 5. \int \arcsin x dx & 10. \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx
 \end{array}$$

⊗ 10.5. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int x \sin x dx & 6. \int x \sqrt{1+x} dx & 11. \int e^{2x} \cos 3x dx \\
 2. \int x \sin 4x dx & 7. \int x^2 \sqrt{1-x} dx & 12. \int \sin 3x \cos 2x dx \\
 3. \int x \cos 3x dx & 8. \int \frac{x e^x}{(1+x)^2} dx & 13. \int \sin^3 x dx \\
 4. \int x e^{4x} dx & 9. \int x \operatorname{arctg} x dx & 14. \int \sin^4 x dx \\
 5. \int x e^{-3x} dx & 10. \int \arccos 2x dx &
 \end{array}$$

© 10.6. (Labo C8) Bereken de volgende onbepaalde integralen (rationale functies).

$$\begin{array}{ll}
 1. \int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)} dx & 6. \int \frac{1}{e^{2x}-3e^x} dx \\
 2. \int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx & 7. \int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx \\
 3. \int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x} dx & 8. \int \frac{\sin x}{\cos x(1+\cos^2 x)} dx \\
 4. \int \frac{x}{(x-2)^2} dx & 9. \int \frac{4x^4+2x^3-12x^2+9}{x^3-3x+2} dx \\
 5. \int \frac{1}{x^3+x} dx & 10. \int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8} dx
 \end{array}$$

☼☼ 10.7. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} dx & 3. \int \frac{x^4}{(1-x)^3} dx & 6. \int \frac{3x+5}{x^3 - x^2 - x + 1} dx \\
 2. \int \frac{1}{x^3 - x} dx & 4. \int \frac{2x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2} dx & 7. \int \frac{4x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 9}{x^3 - 3x + 2} dx \\
 & 5. \int \frac{x^2 + 3x + 4}{x^2 - 2x + 8} dx & 8. \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx
 \end{array}$$

◎ 10.8. (Labo C9) Bereken de volgende onbepaalde integralen (goniometrische functies).

$$\begin{array}{ll}
 1. \int \sin 2x \cos 4x dx & 6. \int \sin^4 4x \cos^2 4x dx \\
 2. \int 3 - 2 \cos x dx & 7. \int \operatorname{tg}^5 x dx \\
 3. \int \frac{1}{\sin x - \cos x - 1} dx & 8. \int \frac{2 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx \\
 4. \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx & 9. \int \frac{\cos^3 x}{1 - \sin x} dx \\
 5. \int \frac{1}{\cos^4 x} dx & 10. \int \frac{1}{\cos^3 x} dx
 \end{array}$$

☼☼ 10.9. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \operatorname{tg} 2x dx & & 5. \int \frac{1}{\cos^6 x} dx \\
 2. \int \sin^3 x dx & 4. \int \cos^4 2x \sin^2 2x dx & 6. \int \frac{1}{3 - 2 \cos x} dx \\
 3. \int \operatorname{tg}^2 3x dx & &
 \end{array}$$

◎ 10.10. (Labo C9) Bereken de volgende onbepaalde integralen (irrationale functies).

$$\begin{array}{ll}
 1. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{4+x^2}} dx & 6. \int x \arccos x dx \\
 2. \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx & 7. \int \frac{1}{x \sqrt{1-x}} dx \\
 3. \int \sqrt{x^2-4} dx & 8. \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx \\
 4. \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx & 9. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx \\
 5. \int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx & 10. \int \frac{x-5}{(x^2-10x+21)^{\frac{3}{2}}} dx
 \end{array}$$



☼☼ 10.11. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. & \int \sqrt{1-x^2} dx & \\
 2. & \int \sqrt{9+x^2} dx & \\
 3. & \int \sqrt{x^2-16} dx & 6. \int \frac{1}{\sqrt{16+x^2}} dx \\
 4. & \int \sqrt{x^2-4} dx & 7. \int \frac{1}{x^2\sqrt{4+x^2}} dx \\
 5. & \int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x} dx & 8. \int x \arccos x dx
 \end{array}$$

☼☼ 10.12. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. & \int \frac{1}{x\sqrt{1-x}} dx & 5. \int \frac{1}{(x-2)\sqrt{x+2}} dx \\
 2. & \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx & 6. \int \frac{x+\sqrt{x+1}}{x+2} dx \\
 3. & \int \frac{x^3}{\sqrt{x-2}} dx & 7. \int \frac{(2x+1)\sqrt{2x+1}}{\sqrt[3]{2x+1}} dx \\
 4. & \int \frac{x^2}{\sqrt{36-x^2}} dx & 8. \int \frac{x-5}{(x^2-10x+21)^{\frac{3}{2}}} dx \\
 9. & \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx & \\
 10. & \int \frac{1}{\sqrt{2-x-x^2}} dx & \\
 11. & \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx & \\
 12. & \int \frac{1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} dx & 
 \end{array}$$

© 10.13. (Labo C9) Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{ll}
 1. & \int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}} dx \\
 2. & \int \frac{3x^2-4}{(x+2)^3} dx \\
 3. & \int \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} dx \\
 4. & \int \frac{\sqrt{\arcsin 5x}}{\sqrt{1-25x^2}} dx \\
 5. & \int \sqrt{12-12x-9x^2} dx \\
 6. & \int \frac{1}{(1-\cos x)^2} dx \\
 7. & \int \frac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} dx \\
 8. & \int \frac{e^x}{e^{4x}-1} dx \\
 9. & \int \frac{3x^2-8}{7x^2+5} dx \\
 10. & \int x^3 \sqrt{9-16x^2} dx
 \end{array}$$

☼☼ 10.14. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{ll}
 1. \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} - 1} dx & 5. \int x \ln(x^2 - 2x + 1) dx \\
 2. \int \frac{3x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x^2 + x} dx & 6. \int \frac{1}{(4x^2 - 24x + 27)^{\frac{3}{2}}} dx \\
 3. \int x \operatorname{arctg} \left( \frac{2x}{x+1} \right) dx & 7. \int e^x \cos e^x \sqrt{\sin^2 e^x + 2} dx \\
 4. \int \cos^{\frac{2}{3}} x \sin^5 x dx & 8. \int (3x^2 - 2x - 2) \ln^2(x^2 - 2x) dx \\
 & 9. \int e^x \operatorname{arctg} \left( \frac{2 \sin e^x}{\sin e^x + 3} \right) \cos e^x dx
 \end{array}$$

☆ 10.15. Bereken de volgende onbepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int \frac{x^5 + 3}{x^3 + x} dx & 7. \int e^x \sqrt{1 - e^{2x}} dx & 13. \int \frac{1}{\sin x + \cos x - 1} dx \\
 2. \int \sqrt{1 + e^{2x}} dx & 8. \int x^2 \operatorname{arctg} x^3 dx & 14. \int \frac{x^5}{x^2 + 4x + 4} dx \\
 3. \int \frac{\sqrt{4+x}}{x} dx & 9. \int \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 2x} dx & 15. \int \frac{\sin x}{\cos^2 x (1 + \cos^2 x)} dx \\
 4. \int \frac{2 \cos x}{\sin^2 x - 4} dx & 10. \int \frac{4e^x}{e^{4x} - 1} dx & 16. \int 2x^3 \arcsin x^2 dx \\
 5. \int x \cos^2 x dx & 11. \int \frac{x\sqrt{25+x}}{x+9} dx & 17. \int x^2 \sqrt{169 - x^2} dx \\
 6. \int \frac{4\sqrt{x+1}}{x} dx & 12. \int \frac{4 \sin^4 x}{\cos x} dx & 18. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}} dx \\
 19. \int \frac{1}{e^{2x} - e^x} dx & 24. \int \frac{3x}{x^2 - 10x + 25} dx & 29. \int \frac{(4 \cos^3(x) - 16) \sin(x)}{\cos^2(x)(\cos(x) - 2)} dx \\
 20. \int \frac{e^{4x} + 4e^x}{e^{2x} - 4} dx & 25. \int (x+1) \sin \sqrt{x+1} dx & 30. \int \frac{(4 \sin^3(x) - 16) \cos(x)}{\sin(x)(\sin(x) - 2)^2} dx \\
 21. \int \frac{\sqrt{x+9}}{x} dx & 26. \int \frac{x+4}{x + \sqrt{x+2}} dx & 31. \int \frac{6e^{3x} - 12e^{2x} + 48e^x}{e^{3x} + 64} dx \\
 22. \int \frac{x^2}{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx & 27. \int \frac{12 \sin x}{\cos^2 x + 3 \cos x} dx & 32. \int \frac{\sqrt{x+1}(5x+60)}{x^2 - x - 6} dx \\
 23. \int \frac{\sqrt{x+1}}{x-3} dx & 28. \int \frac{-2 \sin x}{\cos(x)(1 - \cos(x))^2} dx & 33. \int \frac{\sqrt{x+2}(10x+40)}{x^2 - 4x - 21} dx \\
 34. \int \frac{3e^{4x} - 2e^{3x} + e^{2x} + 2e^x}{e^{4x} - 2e^{3x} + 2e^{2x} - 2e^x + 1} dx & &
 \end{array}$$

## Oplossingen - Solutions

## 10.1.

- |    |                        |     |                         |
|----|------------------------|-----|-------------------------|
| 1. | $\frac{x^4}{4} + C$    | 6.  | $\ln x  + C$            |
| 2. | $x^3 + x^2 + 5x + C$   | 7.  | $-\frac{1}{3x^3} + C$   |
| 3. | $4\sqrt{x^3} + C$      | 8.  | $\sin x + \cos x + C$   |
| 4. | $45\sqrt[3]{x^4} + C$  | 9.  | $\frac{5^x}{\ln 5} + C$ |
| 5. | $100\sqrt[5]{x^8} + C$ | 10. | $\ln x^2 + x - 5  + C$  |

## 10.2.

- |    |  |     |   |
|----|--|-----|---|
| 1. | $-\frac{1}{2} \cos 2x + C$                       | 9.  | $\frac{1}{12} \operatorname{arctg} \frac{\sin^2 4x}{3} + C$               |
| 2. | $\frac{2}{3} \sin^{\frac{3}{2}} x + C$           | 10. | $\ln x^2 + 6x + 13  - \frac{9}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C$ |
| 3. | $\frac{1}{2} \ln x^2 + 1  + C$                   | 11. | $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C$                                |
| 4. | $-\frac{1}{2} e^{-2x} + C$                       | 12. | $2\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} + C$                                     |
| 5. | $\frac{3}{16} (2x^2 + 3)^{\frac{4}{3}} + C$      | 13. | $-\frac{1}{4} \cos 4x + \frac{1}{2} \ln \cos(1 - 2x)  + C$                |
| 6. | $\ln \left  \frac{C}{(1 - \sqrt{x})^2} \right $  | 14. | $-\frac{1}{2} \arccos^2 x + \sqrt{1 - x^2} + C$                           |
| 7. | $x + \frac{1}{2} \cos 2x + C = x - \sin^2 x + C$ | 15. | $\frac{1}{4} \ln 3 - e^{-2x^2}  + C$                                      |
| 8. | $\frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3x}{2} + C$ |     |   |

## 10.3.

- |    |   |     |  |
|----|---|-----|--|
| 1. | $\frac{x^6}{6} + C$                                     | 9.  | $\frac{1}{6} (1 + x^4)^{\frac{3}{2}} + C$                  |
| 2. | $\frac{2}{9} x^4 \sqrt{x} + C$                          | 10. | $\sqrt{x^2 + 2x - 4} + C$                                  |
| 3. | $\frac{2}{5} x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{3} x \sqrt{x} + C$ | 11. | $-\frac{1}{4} \cos 4x - \frac{1}{2} \ln \cos(2x - 1)  + C$ |
| 4. | $\frac{1}{2} \ln 2x - 3  + C$                           | 12. | $\frac{1}{4} \ln 3 - e^{-2x^2}  + C$                       |
| 5. | $-\frac{2}{9} (2 - 3x)^{\frac{3}{2}} + C$               | 13. | $\frac{1}{2(1 + \cos 2x)} + C$                             |
| 6. | $\frac{1}{2(2 - x)^2} + C$                              |     |  |
| 7. | $\frac{1}{2} \sin x^2 + C$                              |     |  |
| 8. | $-\frac{1}{5} \cos^5 x + C$                             |     |  |

## 10.4.

1.  $-x \cos x + \sin x + C$
2.  $\frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$
3.  $x \ln |x| - x + C$
4.  $\frac{2}{105}(1-x)^{\frac{3}{2}}(-15x^2 - 12x - 8) + C$
5.  $x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
6.  $-\frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2}x + C$
7.  $2x\sqrt{1+x} - \frac{4}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$
8.  $(x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$
9.  $\frac{1}{13}e^{2x}(2 \cos 3x + 3 \sin 2x) + C$
10.  $\frac{e^x}{1+x} + C$

## 10.5.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $-x \cos x + \sin x + C$                             | 8. $\frac{e^x}{x+1} + C$  |
| 2. $-\frac{1}{4}x \cos 4x + \frac{1}{16} \sin 4x + C$   | 9. $\frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C$                  |
| 3. $\frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$     | 10. $x \arccos 2x - \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + C$                                 |
| 4. $\frac{1}{4}xe^{4x} - \frac{1}{16}e^{4x} + C$        | 11. $\frac{3}{13}e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{13}e^{2x} \cos 3x$                     |
| 5. $-\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} + C$      | 12. $-\frac{2}{5} \sin 3x \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 3x \cos 2x + C$              |
| 6. $\frac{2}{15}(3x-2)(1+x)^{\frac{3}{2}} + C$          | 13. $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x$   |
| 7. $-\frac{2}{105}(15x^2+12x+8)(1-x)^{\frac{3}{2}} + C$ | 14. $-\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + C$ |

## 10.6.

1.  $\ln \left| \frac{(x-2)^3}{x-1} \right| + C$
2.  $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2 \ln |x| + 5 \ln |x-2| - 3 \ln |x+2| + C$
3.  $\frac{1}{2} \ln |x| + \frac{3}{2} \ln |x+2| - \ln |x-1| + C$
4.  $\ln |x-2| - \frac{2}{x-2} + C$
5.  $\ln |x| - \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C$
6.  $\frac{1}{9} \ln \left| \frac{e^x-3}{e^x} \right| + \frac{1}{3e^x} + C$
7.  $-\frac{x^2}{2} - 3x - 6 \ln |x-1| + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{2(x-1)^2} + C$
8.  $-\ln |\cos x| + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) + C$
9.  $2x^2 + 2x - \ln |x-1| + \frac{1}{1-x} + \ln |x+2| + C$
10.  $x + \ln |x+2| + 4 \ln |x-4| + C$

## 10.7.

1.  $\ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + C$
2.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x^2-1}{x^2} \right| + C$
3.  $-\frac{x^2}{2} - 3x - 6 \ln |x-1| + \frac{4}{x-1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C$
4.  $\frac{5}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$
5.  $x + \frac{5}{2} \ln |x^2 - 2x + 8| + \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x-1}{\sqrt{7}} \right) + C$
6.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{4}{x-1} + C$
7.  $2x^2 + 2x + \ln \left| \frac{x+2}{x-1} \right| - \frac{1}{x-1} + C$
8.  $\frac{1}{2} \ln |x^2+2| - \frac{1}{(x^2+2)^2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left( \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$

## 10.8.

1.  $\frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + C$
2.  $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C$
3.  $\ln |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1| + C$
4.  $-\frac{1}{3 \sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C$
5.  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x + C$
6.  $\frac{1}{16} x - \frac{1}{256} \sin 16x - \frac{1}{192} \sin^3 8x + C$
7.  $\frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln \left| \frac{1}{\cos x} \right| + C$
8.  $\frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$
9.  $\sin x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$
10.  $\frac{\sin x}{2 \cos^2 x} - \frac{1}{2} \ln |1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}| + \frac{1}{2} \ln |1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}| + C$   
 $= \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln |1 + \sin x| - \frac{1}{2} \ln |\cos x| + C$

## 10.9.

1.  $-\frac{1}{2} \ln |\cos 2x| + C$
2.  $\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C$
3.  $\frac{1}{3} \operatorname{tg} 3x - x + C$
4.  $\frac{1}{16} x - \frac{1}{128} \sin 8x + \frac{1}{96} \sin^3 4x + C$
5.  $\frac{\sin x}{5 \cos^5 x} + \frac{4 \sin x}{15 \cos^3 x} + \frac{8 \sin x}{15 \cos x} + C$
6.  $\frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg}(\sqrt{5} \operatorname{tg} \frac{x}{2}) + C$

## 10.10.

1.  $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$
2.  $\sqrt{25-x^2} + 5 \ln \left| \frac{\sqrt{25-x^2}-5}{x} \right| + C$
3.  $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} - 2 \ln \left| \frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2} \right| + C$
4.  $-\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$
5.  $\sqrt{x^2-9} - 3 \arccos \frac{3}{x} + C$
6.  $\frac{x^2}{2} \arccos x + \frac{1}{4} \arcsin x - \frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2} + C$
7.  $\ln \left| \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1} \right| + C$
8.  $2\sqrt{x} - 2 \ln |1+\sqrt{x}| + C$
9.  $-2\sqrt{1-e^x} + C$
10.  $-\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+21}} + C$

## 10.11.

1.  $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$
2.  $\frac{9}{2} \ln |x+\sqrt{9+x^2}| + \frac{1}{2}x\sqrt{9+x^2} + C$
3.  $8 \ln |\sqrt{x^2-16}-x| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-16} + C$
4.  $2 \ln |\sqrt{x^2-4}-x| + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-4} + C$
5.  $\sqrt{25-x^2} + 5 \ln \left| \frac{\sqrt{25-x^2}-5}{x} \right| + C$
6.  $\ln |\sqrt{16+x^2}+x| + C$
7.  $-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + C$
8.  $\frac{2x^2-1}{4} \arccos x - \frac{1}{x}x\sqrt{1-x^2} + C$

## 10.12.

1.  $\ln \left| \frac{(\sqrt{1-x}-1)^2}{x} \right| + C$
2.  $2\sqrt{x} - 2 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$
3.  $\frac{2}{7}(x-2)^{\frac{7}{2}} + \frac{12}{5}(x-2)^{\frac{5}{2}} + 8(x-2)^{\frac{3}{2}} + 16(x-2)^{\frac{1}{2}} + C$
4.  $18 \arcsin \frac{x}{6} - \frac{x\sqrt{36-x^2}}{2} + C$
5.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{(\sqrt{x+2}-2)^2}{x-2} \right| + C$
6.  $x + 2\sqrt{x+1} - 2 \ln |x+2| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$
7.  $\frac{3}{13}(2x+1)^2 \sqrt[6]{2x+1} + C$
8.  $-\frac{1}{\sqrt{x^2-10x+21}} + C$
9.  $-2\sqrt{1-e^x} + C$
10.  $\arcsin\left(\frac{2x+1}{3}\right) + C$
11.  $\ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right| + C$
12.  $-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + C$

## 10.13.

1.  $2\sqrt{x} \ln^2 x - 8\sqrt{x} \ln x + 16\sqrt{x} + C$
2.  $3 \ln |x+2| + \frac{12}{x+2} - \frac{4}{(x+2)^2} + C$
3.  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}x} \right| + C$
4.  $\frac{2}{15} \arcsin^{\frac{3}{2}} 5x + C$
5.  $\frac{2}{3}(3x+2) \sqrt{1 - \left(\frac{3x+2}{4}\right)^2} + \frac{8}{3} \arcsin \frac{3x+2}{4} + C$
6.  $-\frac{3 \cos x \sin^2 x + 2 \cos^3 x + 2}{3 \sin^3 x} + C$
7.  $-(2 + \sqrt{x})^2 + 12(2 + \sqrt{x}) - 16 \ln |2 + \sqrt{x}| + C$
8.  $-\frac{1}{2} \operatorname{arctg} e^x + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| + C$
9.  $\frac{3}{7}x - \frac{71}{7\sqrt{35}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}x}{\sqrt{5}} + C$
10.  $-\frac{1}{640}(9 - 16x^2)^{\frac{3}{2}}(3 + 8x^2) + C$



## 10.14.

1.  $\frac{1}{2} \ln |e^{2x} - 1| + C$
2.  $\ln |x^2(x-1)| + \frac{1}{x-1} + C$
3.  $\frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x+1}\right) - \frac{x}{5} + \frac{1}{25} \ln |5x^2 + 2x + 1|$   
 $+ \frac{3}{50} \operatorname{arctg}\left(\frac{5x+1}{2}\right) + C,$
4.  $-\frac{3}{5} \cos^{\frac{5}{3}} x + \frac{6}{11} \cos^{\frac{11}{3}} x - \frac{3}{17} \cos^{\frac{17}{3}} x + C$
5.  $(x^2 - 1) \ln |x - 1| - \frac{x^2}{2} - x + C$
6.  $-\frac{x-3}{9\sqrt{4x^2-24x+27}} + C$
7.  $\ln |\sin e^x + \sqrt{\sin^2 e^x + 2}| + \frac{1}{2} \sin e^x \sqrt{\sin^2 e^x + 2} + C$
8.  $(x^3 - x^2 - 2x) \ln^2(x^2 - 2x) - \frac{4}{3}(x^3 - 3x) \ln(x^2 - 2x) + \frac{8}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{8}{3} \ln(x-2) + C$
9.  $\sin(e^x) \operatorname{arctg} \frac{2 \sin e^x}{\sin e^x + 3} + \frac{3}{5} \operatorname{arctg} \frac{5 \sin e^x + 3}{6} - \frac{3}{5} \ln |5 \sin^2 e^x + 6 \sin e^x + 9| + C$

## 10.15.

1.  $\frac{x^3}{3} - x + 3 \ln |x|$   
 $-\frac{3}{2} \ln |x^2 + 1| + \operatorname{arctg} x + C$
2.  $\sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right| + C$
3.  $2\sqrt{4+x} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{4+x} - 2}{\sqrt{4+x} + 2} \right| + C$
4.  $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin x - 2}{\sin x + 2} \right| + C$
5.  $\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} x \sin x \cos x + \frac{1}{4} \cos^2 x + C$
6.  $8\sqrt{1+x} + 4 \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} \right| + C$
7.  $\frac{1}{2} \arcsin e^x + \frac{1}{2} e^x \sqrt{1 - e^{2x}}$
8.  $\frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} x^3 - \frac{1}{6} \ln |1 + x^6| + C$
9.  $\operatorname{arctg} \sqrt{x-1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x-1} + 1} \right| + C$
10.  $\ln \left| \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right| - 2 \operatorname{arctg} e^x + C$
11.  $\frac{2}{3}(x+25)^{\frac{3}{2}} - 18\sqrt{x+25}$   
 $+ 36 \ln \left| \frac{\sqrt{x+25} + 4}{\sqrt{x+25} - 4} \right| + C$
12.  $-\frac{4}{3} \sin^3 x - 4 \sin x + 2 \ln \left| \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \right| + C$
13.  $\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} \right| + C$
14.  $\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 - 32x$   
 $+ 80 \ln |x+2| + \frac{32}{x+2} + C$
15.  $\frac{1}{\cos x} + \operatorname{arctg} \cos x + C$
16.  $\frac{2x^4 - 1}{4} \arcsin x^2 + \frac{1}{4}x^2 \sqrt{1 - x^4} + C$
17.  $\frac{28561}{8} \arcsin \frac{x}{13} - \frac{1}{4}x(169 - x^2)^{\frac{3}{2}}$   
 $+ \frac{169}{8}x \sqrt{169 - x^2} + C$
18.  $\ln |\sqrt{x^2 + 2x + 5} + x + 1| + C$

19.  $\ln |1 - e^{-x}| + e^{-x} + C$
20.  $\frac{1}{2}e^{2x} + 3 \ln |e^x - 2| + \ln |e^x + 2| + C$
21.  $2\sqrt{x+9} + 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x+9} - 3}{\sqrt{x+9} + 3} \right| + C$
22.  $-\arcsin \frac{x}{2} + \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} + C$
23.  $2\sqrt{x+1} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+1} + 2} \right| + C$
24.  $3 \ln |x - 5| - \frac{15}{x-5} + C$
25.  $-2(x-5)\sqrt{x+1} \cos \sqrt{x+1}$   
 $+ 6(x-1) \sin \sqrt{x+1} + C$
26.  $x - 2\sqrt{x+2} + 8 \ln |\sqrt{x+2} + 2|$   
 $+ 2 \ln |\sqrt{x+2} - 1| + C$
27.  $4 \ln \left| 1 + \frac{3}{\cos x} \right| + C$
28.  $2 \ln \left| \frac{\cos x}{1 - \cos x} \right| + \frac{2}{1 - \cos x}$
29.  $-4 \cos x + \frac{8}{\cos x} - 4 \ln |\cos^2 x - 2 \cos x| + C$
30.  $4 \sin x - 4 \ln |\sin x| + 20 \ln |2 - \sin x|$   
 $+ \frac{8}{2 - \sin x} + C$
31.  $4 \ln |e^x + 4| + \ln |e^{2x} - 4e^x + 16| + C$
32.  $10\sqrt{x+1} + 30 \ln \left| \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+1} + 2} \right|$   
 $+ 20 \operatorname{arctg} \sqrt{x+1} + C$
33.  $20\sqrt{x+2} + 33 \ln \left| \frac{\sqrt{x+2} - 3}{\sqrt{x+2} + 3} \right|$   
 $+ 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x+2} + C$
34.  $-\frac{1}{e^x - 1} + \ln |e^{2x} + 1| + \operatorname{arctg} e^x + C$

# HOOFDSTUK 11

## BEPAAALDE INTEGRAL

► **11.1.** Bereken de volgende bepaalde integralen.

$$\begin{array}{ll} 1. \int_1^3 x dx & 3. \int_0^1 e^x dx \\ 2. \int_0^\pi \sin x dx & 4. \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx \end{array}$$

© **11.2.** (Labo C10) Bereken de volgende bepaalde integralen.

$$\begin{array}{l} 1. \int_0^1 x(1 - \sqrt{x})^2 dx \\ 2. \int_1^2 \frac{x^2}{25 - x^2} dx \\ 3. \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \\ 4. \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x^3 \cos x^2 dx \\ 5. \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x} dx \end{array}$$

⊗ 11.3. Bereken de volgende bepaalde integralen.

$$\begin{array}{lll}
 1. \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx & 6. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx & 11. \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x dx \\
 2. \int_0^1 x e^x dx & 7. \int_{-5}^{-1} x \sqrt{x+5} dx & 12. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx \\
 3. \int_1^3 \frac{1}{3x-1} dx & 8. \int_2^9 \frac{3x}{\sqrt[3]{x-1}} dx & 13. \int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx \\
 4. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2} dx & 9. \int_{-2}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} dx & 14. \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx \\
 5. \int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x dx & 10. \int_1^{16} \frac{1}{x+x^{\frac{3}{4}}} dx & 15. \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{2x}{1+x^4} dx \\
 & & 16. \int_{-2}^2 (3x^2 - 2x + 4) dx
 \end{array}$$

⊙ 11.4. (Labo C10) Bereken de oppervlakte van het gebied tussen volgende krommen.

1.  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$  (2 methoden/méthodes)
2.  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$
3.  $y = 2 + x - x^2$ ,  $y = 0$
4.  $x = 8 + 2y - y^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = -1$ ,  $y = 3$
5.  $y = x^2 - 7x + 6$ ,  $x = 2$ ,  $x = 6$ ,  $y = 0$
6.  $y^2 = 6x$   $x^2 = 6y$ , (2 methoden/méthodes)
7.  $y = x^2 - 5$ ,  $y = 3 - x^2$
8.  $y = x$ ,  $x = y^2 - 2$  (2 methoden/méthodes)

⊗⊗ 11.5. Bereken de oppervlakte van het gebied tussen volgende krommen.

1.  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 0$
2.  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$
3.  $y = x^2$ ,  $y = x + 6$
4.  $y = x^2$ ,  $y = \frac{16}{x^2}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$
5.  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $y = x^2 - 7x + 12$
6.  $y^2 = x^2 - x^4$

⊙ 11.6. (Labo C10) Bereken de oppervlakte van de ellips, gegeven door

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

⊙ **11.7.** (Labo C10) Bereken  $a$  zó dat de oppervlakte van het vlakke gebied, begrensd door de  $y$ -as en de kromme  $x = 4 - y^2$  in twee gelijke delen verdeeld wordt door de rechte  $x = a$ .

⊙ **11.8.** (Labo C11) Bereken het volume van het gegeven omwentelingslichaam. Gebruik de 2 methoden (schijven en buizen).

1.  $y = -x^2 + 3, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad \text{as/axe } x$

2.  $y = 4x^2, \quad x = 0, \quad y = 16 \quad \text{as/axe } y$

3.  $y^2 = 8x, \quad x = 2, \quad \text{as/axe } x = 2$

4.  $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2, \quad \text{as/axe } y$

5.  $4x^2 + 9y^2 = 36, \quad \text{as/axe } y$

⊙ **11.9.** (Labo C11) Bereken het volume van het gegeven omwentelingslichaam.

1.  $y = 4x - x^2, \quad y = 0, \quad \text{as/axe } y = 6$

2.  $y = \sin 2x, \quad x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad \text{as/axe } x$

3.  $2x - y + 4 = 0, \quad y = 2x^2, \quad \text{as/axe } x = 2$

4.  $y = \sqrt{4 - x}, \quad \text{eerste kwadrant/premier quadrant} \quad \text{as/axe } y = -2$

5.  $y = 2x^2, \quad y = 0, \quad x = 5, \quad \text{as/axe } x = 6$

⊗⊗ **11.10.** Bereken het volume van het gegeven omwentelingslichaam.

1.  $y = x^2, x = 0, x = 2,$  as/axe  $x$
2.  $y = x^2, x = 0, x = 2,$  as/axe  $y$
3.  $y = e^x, x = -2, x = 2,$  as/axe  $x$
4.  $y = \sin x, x = 0, x = \pi,$  as/axe  $x$
5.  $y = \sin x, x = 0, x = \pi,$  as/axe  $y$
6.  $y = 2x - x^2, y = x,$  as/axe  $x$
7.  $y = x^2, y = 2x,$  as/axe  $x$
8.  $y = x^2, y = 2x,$  as/axe  $y$
9.  $y = \sqrt{x}, y = x^2,$  as/axe  $x$
10.  $x^2 + y^2 = 25, x - 7y + 25 = 0,$  as/axe  $x$
11.  $y = \sqrt{x}, y = x^2,$  as/axe  $y$
12.  $y = 4x - x^2, y = 0,$  as/axe  $x$
13.  $y = 4x - x^2, y = 0,$  as/axe  $y$
14.  $y = 2x^2, y = 0, x = 0, x = 5$  as/axe  $y$
15.  $y = 2x^2, 2x - y + 4 = 0,$  as/axe  $x = 2$

☼☼ 11.11. Bereken de lengte van de volgende krommen.

1.  $y = \frac{4}{3}x, x \in [0, 3]$
2.  $y = \ln(1 - x^2), x \in [0, \frac{2}{3}]$
3.  $y = x^2, x \in [0, a]$
4.  $y = \ln \sin x, x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

© 11.12. (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen.

$$y = 4 - x^2, \quad x = 0, \quad y = 0$$

- ⊙ **11.13.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen.

$$y = 4x - x^2, \quad y = x$$

- ⊙ **11.14.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen.

$$y = 2x^2, \quad y = x^2 + 1$$

- ⊙ **11.15.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur (in het tweede kwadrant), begrensd door de volgende krommen.

$$x = y^2 - 9, \quad x = 0, \quad y = 0$$

- ⊙ **11.16.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen.

$$9x^2 + 16y^2 = 144, \quad \text{eerste kwadrant/premier quadrant}$$

- ⊙ **11.17.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen.

$$x = y^2, \quad x^2 = -8y$$

- ⊗⊗ **11.18.** Bepaal het zwaartepunt van de vlakke figuur begrensd door de gegeven krommen.

1.  $y = 4 - x^2, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2$
2.  $y = x^2, \quad y = 9$

- ⊙ **11.19.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het volgende vlakke gebied te laten wentelen rond de aangegeven as.

$$y = x^3, \quad x = 0, \quad x = 2, \quad \text{as/axe } x$$

- ⊙ **11.20.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het volgende vlakke gebied te laten wentelen rond de aangegeven as. Gebruik de methode van schijven en de methode van buizen.

$$y = 4 - x^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad \text{as/axe } x$$

- ⊙ **11.21.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het volgende vlakke gebied te laten wentelen rond de aangegeven as.

$$y = 4x - x^2, \quad y = x, \quad \text{as/axe } x$$

- ⊙ **11.22.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het volgende vlakke gebied te laten wentelen rond de aangegeven as.

$$x^2 - y^2 = 16, \quad y = 0, \quad x = 8, \quad \text{as/axe } y$$

- ⊙ **11.23.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het volgende vlakke gebied te laten wentelen rond de aangegeven as.

$$(x - 2)y^2 = 4, \quad y = 0, \quad x = 3, \quad x = 5, \quad \text{as/axe } x$$

- ⊙ **11.24.** (Labo C12) Bepaal het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het volgende vlakke gebied te laten wentelen rond de aangegeven as.

$$y^2 = 12x. \quad x = 3, \quad (\text{eerste kwadrant/premier quadrant}), \quad \text{as/axe } y$$

- ⊗⊗ **11.25.** Bepaal het zwaartepunt van de volgende omwentelingslichamen.

1.  $y = 4 - x^2, x = 0, x = 2, y = 0, \quad \text{as/axe } x$

- ⊙ **11.26.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment van de vlakke figuren, begrensd door de volgende krommen, ten opzichte van de beide coördinaatsassen. Druk dit traagheidsmoment uit als veelvoud van de oppervlakte van de vlakke figuur.

1.  $y^2 = 4x, \quad x = 1$
2.  $y = 8x^3, \quad y = 0, \quad x = 1$
3.  $4x^2 + 9y^2 = 36, \quad (\text{eerste kwadrant/premier quadrant})$



- ⊙ **11.27.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen, ten opzichte van de  $y$ -as. Druk dit traagheidsmoment uit als veelvoud van de oppervlakte van de vlakke figuur.

$$y = 9 - x^2, \quad y = 0$$

- ⊙ **11.28.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment van de vlakke figuur, begrensd door de volgende krommen, ten opzichte van de  $x$ -as. Druk dit traagheidsmoment uit als veelvoud van de oppervlakte van de vlakke figuur.

$$y = -\frac{1}{4}x^2, \quad x = -\frac{1}{4}y^2$$

- ⊙ **11.29.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment  $I_y$  van de gelijkbenige driehoek gevormd door de punten

$$(0, B), \quad (0, -B), \quad (H, 0)$$

- ⊗⊗ **11.30.** Bereken het traagheidsmoment van de volgende figuren ten opzichte van de opgegeven assen.

1.  $y = 4 - x^2, x = -2, x = 2, y = 0,$  as/axe  $x$
2.  $y = 4 - x^2, x = -2, x = 2, y = 0,$  as/axe  $y$

- ⊙ **11.31.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment (ten opzichte van de symmetrieas) van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het aangegeven vlakke gebied te laten wentelen rond de  $x$ -as. Gebruik de schijvenmethode en de buizenmethode.

$$y^2 = 8x, \quad x = 2, \quad \text{eerste kwadrant/premier quadrant}$$

- ⊙ **11.32.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment (ten opzichte van de symmetrieas) van de omwentelingslichamen die we bekomen door het aangegeven vlakke gebied te laten wentelen rond één van beide coördinaatsassen.

1.  $y = 4x - x^2, \quad y = 0$

- ⊙ **11.33.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment (ten opzichte van de symmetrieas) van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het aangegeven vlakke gebied te laten wentelen rond de  $x$ -as. Gebruik beide methodes.

$$x^2 = 8y, \quad y = 2, \quad \text{eerste kwadrant/premier quadrant}$$

- ⊙ **11.34.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment (ten opzichte van de symmetrieas) van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het aangegeven vlakke gebied te laten wentelen rond de  $y$ -as. Druk dit traagheidsmoment uit als veelvoud van het volume van dit omwentelingslichaam.

$$y^2 = 4x, \quad y = x$$

- ⊙ **11.35.** (Labo C13) Bepaal het traagheidsmoment (ten opzichte van de symmetrieas) van het omwentelingslichaam dat we bekomen door het aangegeven vlakke gebied (gelegen boven de  $x$ -as) te laten wentelen rond de  $x$ -as.

$$x = -\frac{1}{2}y^2 + 4, \quad y = -x, \quad y = 0$$

- ⊗⊗ **11.36.** Bereken het traagheidsmoment van volgende omwentelingslichamen ten opzichte van hun omwentelingsas.

1.  $y = 4x - x^2, y = 0,$  as/axe  $x$
2.  $y = 4x - x^2, y = 0,$  as/axe  $y$

- ⊗⊗ **11.37.** Beschouw het vlakke gebied begrensd door de kromme  $y = \cos x$ , de  $x$ -as en de verticale rechten  $x = 0$  en  $x = \frac{\pi}{2}$ . Bereken

1. De oppervlakte van dit vlakke gebied
2. Het volume van de omwentelingslichamen die we bekomen door dit gebied te laten wentelen rond de  $x$ -as en rond de  $y$ -as.
3. De traagheidsmomenten van het vlakke gebied ten opzichte van de coördinaatassen.
4. Het traagheidsmoment van het omwentelingslichaam, bekomen door wenteling van het vlakke gebied rond de  $x$ -as, ten opzichte van deze omwentelingsas.

- ▣ **11.38.** Beschouw het vlakke gebied begrensd door de krommen  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$  en de  $y$ -as. Bereken
1. De oppervlakte van dit vlakke gebied
  2. Het volume van de omwentelingslichamen die we bekomen door dit gebied te laten wentelen rond de  $x$ -as en rond de  $y$ -as.
  3. De traagheidsmomenten van het vlakke gebied ten opzichte van de coördinaatassen.
  4. Het traagheidsmoment van het omwentelingslichaam, bekomen door wenteling van het vlakke gebied rond de  $x$ -as, ten opzichte van deze omwentelingsas.
- ☆ **11.39.** Beschouw het vlakke gebied begrensd door de kromme  $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ , de  $x$ -as en de verticale rechten  $x = 0$  en  $x = 1$ . Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat men bekomt door dit vlakke gebied te wentelen rond de  $y$ -as. Bereken eveneens het traagheidsmoment van de vlakke figuur ten opzichte van de  $x$ -as.
- ☆ **11.40.** Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = \sqrt{2x - x^2}$  en de verticale rechten  $x = 0$  en  $x = 2$ . Bereken het volume van de omwentelingslichamen die je bekomt door dit gebied te wentelen rond de  $x$ -as en rond de  $y$ -as.
- ☆ **11.41.** Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de krommen  $y = 2x - x^2$  en  $y = 3x^2 - 6x$ . Bereken het zwaartepunt van deze vlakke figuur.
- ☆ **11.42.** Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = 18x - 6x^2$  en de rechte  $y = 6x$ . Bereken het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat men bekomt door de vlakke figuur te wentelen rond de  $x$ -as.
- ☆ **11.43.** Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = \frac{1}{x^2-1}$ , de  $x$ -as en de rechten  $x = 2$  en  $x = 5$ . Bereken het traagheidsmoment van de vlakke figuur ten opzichte van de  $y$ -as.

- ☆ **11.44.** Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de krommen  $y = -2x^2 + 16x - 20$  en  $y = x^2 - 5x + 10$ . Bereken het traagheidsmoment, ten opzichte van de omwentelingsas, van het omwentelingslichaam dat we bekomen door deze figuur te laten wentelen rond de  $y$ -as. Bereken de verhouding tussen dit traagheidsmoment en het volume van het beschouwde lichaam.
- ☆ **11.45.** Beschouw het vlakke gebied begrensd door de kromme  $y = \ln x$ , de  $x$ -as en de verticale rechten  $x = 1$  en  $x = e$ . Bereken het zwaartepunt van het omwentelingslichaam dat men bekomt door dit gebied te laten wentelen rond de  $x$ -as.
- ☆ **11.46.** Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = 3 + \sqrt{4 - x^2}$ , de  $x$ -as en de rechten  $x = -2$  en  $x = 2$ . Bereken het volume van het omwentelingslichaam dat je bekomt door deze figuur te wentelen rond de  $x$ -as.

## Oplossingen - Solutions

11.1.

- |      |                  |
|------|------------------|
| 1. 4 | 3. $e - 1$       |
| 2. 2 | 4. $\frac{1}{2}$ |

11.2.

1.  $\frac{1}{30}$
2.  $-1 + \frac{5}{2} \ln \frac{14}{9}$
3.  $4 - \ln 9$
4.  $\frac{\sqrt{2}}{4} \left( \frac{\pi}{4} + 1 \right) - \frac{1}{2}$
5.  $-(\ln(2 - \sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2})$

11.3.

- |                         |                       |                         |                      |
|-------------------------|-----------------------|-------------------------|----------------------|
| 1. $\ln(5)$             | 5. $\frac{\pi}{2}$    | 9. 0                    | 13. $\frac{9\pi}{2}$ |
| 2. 1                    | 6. $\frac{\ln(2)}{2}$ | 10. $4 \ln \frac{3}{2}$ | 14. $\frac{\pi}{12}$ |
| 3. $\frac{2}{3} \ln(2)$ | 7. $-\frac{208}{15}$  | 11. $\frac{4}{15}$      | 15. $\frac{\pi}{3}$  |
| 4. $\frac{\pi}{12}$     | 8. $\frac{693}{10}$   | 12. $\frac{1}{4}$       | 16. 32               |

11.4.

- |                   |                   |
|-------------------|-------------------|
| 1. $\frac{26}{3}$ | 5. $\frac{56}{3}$ |
| 2. $\frac{32}{3}$ | 6. 12             |
| 3. $\frac{9}{2}$  | 7. $\frac{64}{3}$ |
| 4. $\frac{92}{3}$ | 8. $\frac{9}{2}$  |

11.5.

- |                   |                    |                    |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $\frac{32}{3}$ | 3. $\frac{125}{6}$ | 5. $\frac{250}{3}$ |
| 2. 9              | 4. $\frac{20}{3}$  | 6. $\frac{4}{3}$   |

11.6.

$$\pi ab$$

11.7.

$$a = 4 - 4^{\frac{2}{3}}$$

11.8.

1.  $\frac{24\sqrt{3}}{5}$
2.  $32\pi$
3.  $\frac{256\pi}{15}$
4.  $\frac{3\pi}{10}$
5.  $24\pi$

11.9.

1.  $\frac{1408\pi}{15}$
2.  $\frac{\pi^2}{4}$
3.  $27\pi$
4.  $\frac{88\pi}{3}$
5.  $375\pi$

11.10.

- |                                  |                      |                       |                         |                        |
|----------------------------------|----------------------|-----------------------|-------------------------|------------------------|
| 1. $\frac{32\pi}{5}$             | 4. $\frac{\pi^2}{2}$ | 7. $\frac{64\pi}{15}$ | 10. $\frac{175\pi}{3}$  | 13. $\frac{128\pi}{3}$ |
| 2. $8\pi$                        | 5. $2\pi^2$          | 8. $\frac{8\pi}{3}$   | 11. $\frac{3\pi}{10}$   | 14. $625\pi$           |
| 3. $\frac{\pi}{2}(e^4 - e^{-4})$ | 6. $\frac{\pi}{5}$   | 9. $\frac{3\pi}{10}$  | 12. $\frac{512\pi}{15}$ | 15. $27\pi$            |

11.11.

$$\begin{array}{ll}
 1. & 5 \\
 2. & \ln 5 - \frac{2}{3} \\
 3. & \frac{a\sqrt{1+4a^2}}{2} + \frac{1}{4} \ln(2a + \sqrt{1+4a^2}) \\
 4. & \frac{\ln 3}{\sqrt{4}}
 \end{array}$$

11.12.

$$\bar{x} = \frac{3}{4}, \quad \bar{y} = \frac{8}{5}, \quad M_x = \frac{128}{15}, M_y = 4, S = \frac{16}{3}$$

11.13.

$$\bar{x} = \frac{3}{2}, \quad \bar{y} = \frac{54}{5}, \quad M_x = \frac{54}{5}, M_y = \frac{27}{4}, S = \frac{9}{2}$$

11.14.

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{4}{5}, \quad M_x = \frac{16}{15}, M_y = 0, S = \frac{4}{3}$$

11.15.

$$\bar{x} = -\frac{18}{5}, \quad \bar{y} = \frac{9}{8}, \quad M_x = \frac{81}{4}, M_y = -\frac{324}{5}, S = 18$$

11.16.

$$\bar{x} = \frac{16}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{4}{\pi}, \quad M_x = 12, M_y = 16, S = 3\pi$$

11.17.

$$\bar{x} = \frac{9}{5}, \quad \bar{y} = -\frac{9}{10}, \quad M_x = -\frac{12}{5}, M_y = \frac{24}{5}, S = \frac{8}{3}$$

11.18.

$$\begin{array}{ll}
 1. & \bar{x} = \frac{3}{4}, \quad \bar{y} = \frac{8}{5} \\
 2. & \bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{27}{5}
 \end{array}$$

11.19.

$$\bar{x} = \frac{7}{4}, \quad M_{yz} = 2^5\pi, V = \frac{128\pi}{7}$$

11.20.

$$\bar{x} = \frac{5}{8}, \quad M_{yz} = \frac{32\pi}{3}, V = \frac{256\pi}{15}$$

11.21.

$$\bar{x} = \frac{27}{16}, \quad M_{yz} = \frac{729\pi}{20}, V = \frac{108\pi}{5}$$

11.22.

$$\bar{y} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad M_{xz} = 576\pi, V = 128\sqrt{3}\pi$$

11.23.

$$\bar{x} = \frac{2 + \ln 9}{\ln 3}, \quad M_{yz} = 8\pi(1 + \ln 3), V = 4\pi \ln 3$$

11.24.

$$\bar{y} = \frac{5}{2}, \quad M_{xz} = 108\pi, V = \frac{216\pi}{5}$$

11.25.

$$\bar{x} = \frac{5}{8}$$



11.26.

1.  $I_x = \frac{4}{5}S$ ,  $I_y = \frac{3}{7}S$ ,  $S = \frac{8}{3}$
2.  $I_x = \frac{128}{15}S$ ,  $I_y = \frac{2}{3}S$ ,  $S = 2$
3.  $I_x = S$ ,  $I_y = \frac{9}{4}S$ ,  $S = \frac{3\pi}{2}$

11.27.

$$I_y = \frac{9}{5}S, \quad S = 36$$

11.28.

$$I_x = \frac{144}{35}S, \quad S = \frac{16}{3}$$

11.29.

$$I = \frac{BH^3}{6}$$

11.30.

1.  $I_x = \frac{4096}{105}$
2.  $I_y = \frac{128}{15}$

11.31.

$$I_x = \frac{256\pi}{3}$$

11.32.

1.  $I_x = \frac{65536\pi}{515}$   
 $I_y = \frac{4096\pi}{15}$

11.33.

$$I_x = \frac{1280\pi i}{45}$$

11.34.

$$I_x = \frac{16}{3}V_y, \quad V_y = \frac{128\pi}{15}$$

11.35.

$$I_x = \frac{3584}{15}$$

11.36.

$$\begin{aligned} 1. \quad I_x &= \frac{65536\pi}{315} \\ 2. \quad I_y &= \frac{4096\pi}{15} \end{aligned}$$

11.37.

$$\begin{aligned} S &= 1, \\ V_x &= \frac{\pi^2}{4}, \\ V_y &= \pi^2 - 2\pi, \\ I_x &= \frac{2}{9}, \\ I_y &= \frac{\pi^2 - 8}{4}, \\ I_x &= \frac{3\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

11.38.

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{2} - 1, \\ V_x &= \frac{\pi}{2}, \\ V_y &= \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}\pi - 4), \\ I_x &= \frac{5\sqrt{2} - 4}{18}, \\ I_y &= \frac{\pi^2\sqrt{2} - 32\sqrt{2} + 32}{16}, \\ I_x &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

11.39.

$$V_y = \frac{2\pi}{2 + \sqrt{3}}, \quad I_x = \frac{\sqrt{3}}{36} = \frac{\sqrt{3}}{6\pi} S$$

11.40.

$$V_x = \frac{4\pi}{3}, \quad V_y = \pi^2$$

11.41.

$$\bar{x} = 1, \quad \bar{y} = -\frac{4}{5}$$

11.42.

$$\bar{x} = \frac{8}{7}$$

11.43.

$$I_y = \frac{6 + \ln 2}{2}$$

11.44.

$$I_y = \frac{6426\pi}{5} = \frac{68}{5} V_y, \quad V_y = \frac{189\pi}{2}$$

11.45.

$$\bar{x} = \frac{e^2 - 1}{4(e - 2)}$$

11.46.

$$V_x = \frac{140\pi}{3} + 12\pi^2$$



# HOOFDSTUK 12

## NUMERIEKE INTEGRATIE

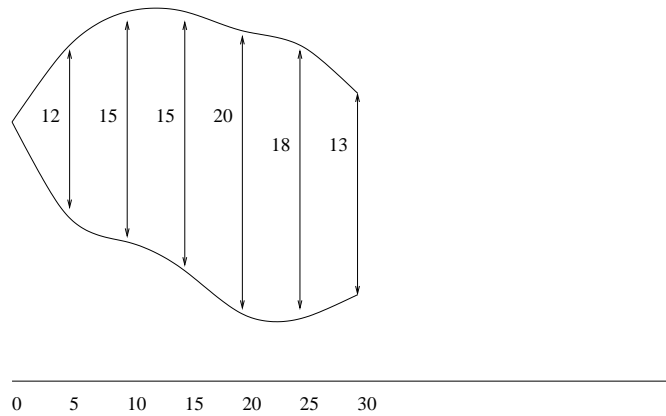
- © **12.1.** (Labo C17) Bepaal een benaderde waarde voor de volgende integraal met behulp van (a) de midpoint regel ( $n = 8$ ), (b) de trapeziumregel ( $n = 8$ ) en (c) de (eerste) regel van Simpson ( $n = 4$ ). Bepaal eveneens (d) de exacte waarde van deze integraal door toepassing van de basisstelling van de integraalrekening.

$$\int_2^4 \sqrt{16 + x} dx$$

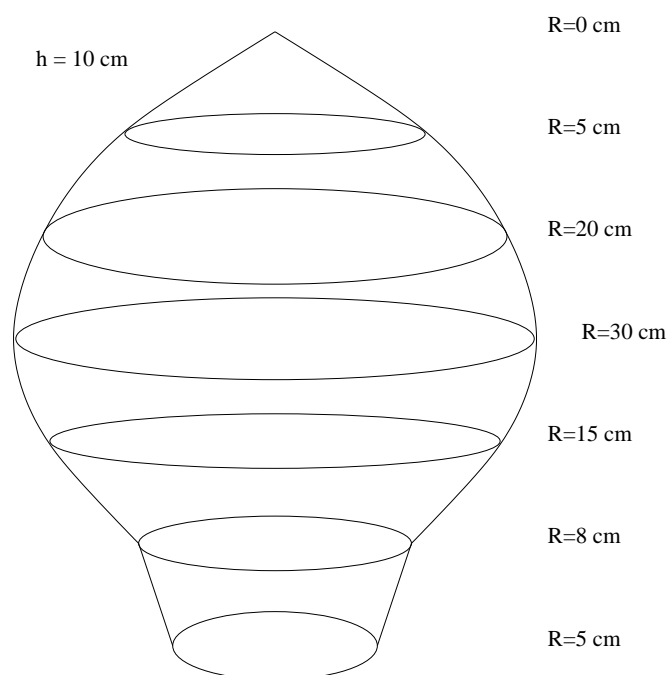
- © **12.2.** (Labo C17) Bepaal een benaderde waarde voor de volgende integraal met behulp van (a) de midpoint regel ( $n = 6$ ), (b) de trapeziumregel ( $n = 6$ ), (c) de eerste regel van Simpson ( $n = 3$ ) en (d) de tweede regel van Simpson ( $n = 2$ ).

$$\int_0^3 \frac{e^x}{x^2 + 1} dx$$

- ⊙ **12.3.** (Labo C17) Bepaal een benaderde waarde voor de oppervlakte van het gebied, begrensd door de kromme  $y = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$  de  $x$ -as,  $x = 2$  en  $x = 3$ , met behulp van (a) de trapeziumregel ( $n = 4$ ) en (b) de eerste regel van Simpson ( $n = 2$ ). Bepaal eveneens (c) de exacte waarde door toepassing van de basisstelling van de integraalrekening.
- ⊙ **12.4.** (Labo C17) Beschouwen we het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ , de  $x$ -as,  $x = 1$  en  $x = 2$ . Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat we bekomen door deze vlakke figuur te wentelen rond de  $x$ -as, met behulp van (a) de trapeziumregel ( $n = 5$ ), (b) de eerste regel van Simpson ( $n = 3$ ) en (c) de tweede regel van Simpson ( $n = 2$ ). Bepaal eveneens (d) de exacte waarde door toepassing van de basisstelling van de integraalrekening (schijvenmethode).
- ⊙ **12.5.** (Labo C17) Beschouwen we het vlakke gebied, begrensd door de krommen  $y = x$  en  $y = (x - 2)^2$ . Bepaal het volume van het omwentelingslichaam dat we bekomen door deze vlakke figuur te wentelen rond de as  $x = -1$ , met behulp van (a) de midpoint regel ( $n = 6$ ), (b) de trapeziumregel ( $n = 6$ ), (c) de eerste regel van Simpson ( $n = 3$ ) en (d) de tweede regel van Simpson ( $n = 2$ ). Bepaal eveneens (e) de exacte waarde door toepassing van de basisstelling van de integraalrekening.
- ⊙ **12.6.** (Labo C17) Bereken een benaderde waarde voor de oppervlakte van het plein (Figuur 7) met behulp van de trapeziumregel en de eerste en tweede regel van Simpson.
- ⊙ **12.7.** (Labo C17) Schat het volume van de tol (Figuur 8) met behulp van de trapeziumregel en de eerste en tweede regel van Simpson .
- ⊙ **12.8.** (Labo C17) Schat de inhoud van de vijver (Figuur 9) door twee keer de regel van Simpson toe te passen.



Figuur 7.



Figuur 8.

- ☼☼ **12.9.** Bereken een benaderde waarde voor de volgende integralen met behulp van de regel van het centrale punt ( $n = 6$ ), de trapeziumregel ( $n = 6$ ), de eerste regel van Simpson ( $n = 3$ ) en de tweede regel van Simpson ( $n = 2$ ).

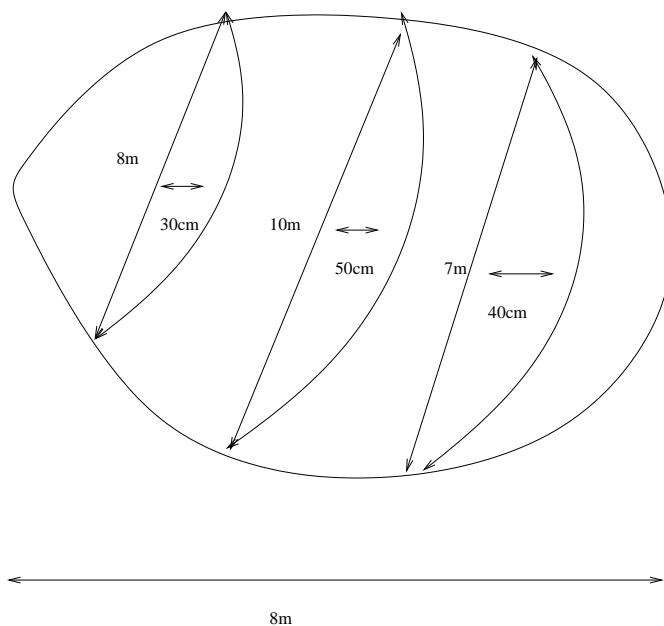
1.  $\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

2.  $\int_0^1 e^{\frac{x^2}{2}} dx$

3.  $\int_0^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

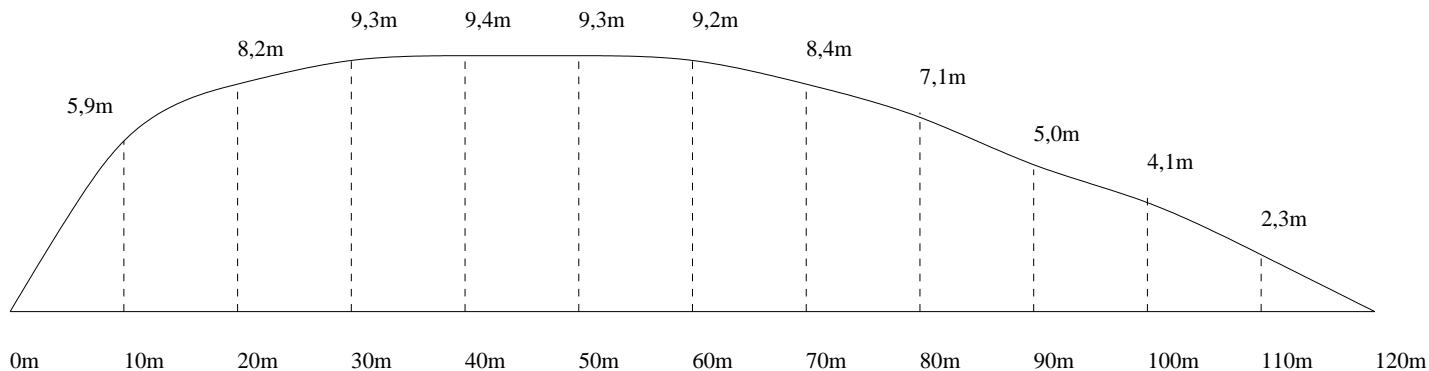
4.  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$

5.  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$



Figuur 9.

- ✪✪ 12.10. Figuur 10 stelt de oppervlakte aan de waterlijn voor van een schip. Bereken de oppervlakte aan de waterlijn, het zwaartepunt van dit vlak gebied en het traagheidsmoment van de figuur ten opzichte van de (horizontale) symmetrie-as. Gebruik hierbij de trapeziumregel en de eerste en tweede regel van Simpson.



Figuur 10.

- ☆ 12.11. Bereken een benaderde waarde voor de bepaalde integraal

$$\int_0^6 \frac{x}{x^2 + 1} dx$$

met behulp van de regel van Simpson met  $n = 3$ . Vergelijk het resultaat met de waarde die je bekomt door gebruik te maken van de basisstelling van de integraalrekening.



- ☆ 12.12. Bereken de bepaalde integraal

$$\int_0^2 x \sqrt{2x - x^2} dx$$

door gebruik te maken van de trapeziummethode ( $n = 4$ ) en van de methode van Simpson ( $n = 2$ ).

- ♣♣ 12.13. Bereken de bepaalde integraal

$$\int_0^2 \sqrt{2x - x^2} dx$$

door gebruik te maken van de methode van Simpson ( $n = 3$ ).

- ☆ 12.14. Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $x^2 + y^2 = 25$  en de rechten  $x = 1$  en  $x = 3$ . Bereken, *met behulp van de regel van Simpson ( $n = 2$ ) en de trapeziumregel ( $n = 4$ )*, het volume van het omwentelingslichaam dat men bekomt wanneer het vlakke gebied wentelt rond de  $y$ -as.

- ☆ 12.15. Beschouw het omwentelingslichaam dat we bekomen door het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = \frac{1}{\sqrt{x+x^2}}$ , de  $x$ -as en de rechten  $x = 1$  en  $x = 4$  te wentelen rond de  $x$ -as. Bereken, *met behulp van de regel van Simpson ( $n = 3$ ) en de trapeziumregel ( $n = 6$ )*, het volume van dit omwentelingslichaam.

- ☆ 12.16. Beschouw het vlakke gebied, begrensd door de kromme  $y = \cos 4x$ , de  $x$ -as en de rechten  $x = -\frac{\pi}{4}$  en  $x = 0$ . Bereken, *met behulp van de regel van Simpson ( $n = 3$ ) en de trapeziumregel ( $n = 6$ )*, het traagheidsmoment van deze vlakke figuur ten opzichte van de  $x$ -as en ten opzichte van de  $y$ -as.

**Oplossingen - Solutions**

**12.1.** (a) 8,716807; (b) 8,71676; (c) 8,71679; (d) 8,71679

**12.2.** (a) 4,36692; (b) 4,35977; (c) 4,36594; (d) 4,36413

**12.3.** (a) 0,4471; (b) 0,4458; (c) 0,4558

**12.4.** (a)  $0,289\pi$ ; (b)  $0,28770\pi$ ; (c)  $0,28773\pi$ ; (d)  $0,28768\pi$

**12.5.** (a)  $31,9375\pi$ ; (b)  $30,625\pi$ ; (c)  $31,5\pi$ ; (d)  $31,5\pi$ ; (e)  $31,5\pi$

**12.6.**  $432,5\text{m}^2$ ,  $438,33\text{m}^2$ ,  $446.25\text{m}^2$

**12.7.**  $16.265\pi \sim 51,098\text{dm}^3$   $54,7789\text{dm}^3$   $46.7351\text{dm}^3$

**12.8.**  $13,68\text{m}^3$

**12.9.**

1.  $M = 0,85628$ ,  $T = 0,85219$ ,  $S_1 = 0,85563$ ,  $S_2 = 0,85564$
2.  $M = 1,19306$ ,  $T = 1,19877$ ,  $S_1 = 1,19499$ ,  $S_2 = 1,19502$
3.  $M = 1,19754$ ,  $T = 1,19379$ ,  $S_1 = 1,19627$ ,  $S_2 = 1,19624$
4.  $M = 1,37192$ ,  $T = 1,36845$ ,  $S_1 = 1,37077$ ,  $S_2 = 1,37078$
5.  $M = 0,78598$ ,  $T = 0,78424$ ,  $S_1 = 0,78540$ ,  $S_2 = 0,78540$

**12.10.**

$$A : 1564,000 \text{ m}^2, \quad 1578,667 \text{ m}^2, \quad 1583,250 \text{ m}^2$$

$$\bar{x} : \frac{83280,000}{1564,000} = 53,248\text{m}, \quad \frac{83440,000}{1578,667} = 52,855\text{m}, \quad \frac{84082,500}{1583,250} = 53,108\text{m}$$

$$I : 34209,573 = 21,873A, \quad 34112,889 = 21,608A, \quad 34215,658 = 21,611A$$

**12.11.**

$$S = 1,80066, \quad E = 1,80546$$

**12.12.**

$$T = 1,36603, \quad S = 1,48803, \quad E = 1,57080$$

**12.13.**

$$S = 1,52601$$

**12.14.**

$$V = \int_1^3 4\pi x \sqrt{25 - x^2} dx, \quad T = 223,64686, \quad S = 224,41177, \quad E = 224,41656$$

**12.15.**

$$V = \int_1^4 \pi \frac{1}{x + x^2} dx, \quad T = 1,52280, \quad S = 1,48062, \quad E = 1,47656$$

**12.16.**

$$I_x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{1}{3} |\cos 4x|^3 dx,$$

$$T = 0,11122, \quad S = 0,11194, \quad E = 0,11111$$

$$I_y = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 x^2 |\cos 4x| dx,$$

$$T = 0,11331, \quad S = 0,10921, \quad E = 0,11278$$