Hogere Zeevaartschool Antwerpen

Faculteit Wetenschappen
Vakgroep Toegepaste en Exacte Wetenschappen

Vectorrekening 2

D. Aerts, P. Bueken, D. Luyckx

HZS-OE5-NW244 (suppl.) - Reeks 1
Tweede jaar Bachelor Nautische Wetenschappen
Versie 14.1
19 september 2015

Inhoudstafel

Hoofdstuk 1

Vectorrekening

◎ **1.1.** (Labo V3) Beschouw een voorwerp dat zich langs een kromme α in het vlak beweegt, waarvan de positie op het tijdstip t gegeven wordt door de parametervergelijking

$$x = t^2 + 2t, \qquad y = t^3.$$

Bereken de snelheidsvector $\vec{v}$ en de versnellingsvector $\vec{a}$ van het voorwerp op het tijdstip $t = 1$. Beschrijf de versnellingsvector $\vec{a}$ op het ogenblik $t = 1$ als een som $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ van een vector $\vec{a}_t$ rakend aan de kromme en een vector $\vec{a}_n$ loodrecht op de kromme.

◎ **1.2.** (Labo V3) Bepaal de richtingsafgeleide, in het punt $P(2,1)$, van de functie $z = 2e^x y^3$ in de richting die een hoek $\theta = 30^\circ$ maakt met de positieve x-as.

◎ **1.3.** (Labo V3) Bepaal de richtingsafgeleide van de functie $f(x,y) = \frac{x^2-y}{x+2y}$ in het punt $P(2,1)$, in de richting van de vector $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

◎ **1.4.** (Labo V3) Bepaal de gradiënt van de functie

$$f(x, y, z) = 2xy^3z^2$$

◎ **1.5.** (Labo V3) Bepaal de gradient grad $f(P)$ van de gegeven functie in het punt $P(3, 2)$

$$z = x + \frac{3x^2 + y^2}{2}$$

◎ **1.6.** (Labo V3) Bepaal, in het punt $P(2, 1)$, de richting waarin de helling van de raaklijn aan $z = x^2 + 5y$ het grootst is. Bepaal de hoek die deze richting vormt met de positieve x-as. Bereken eveneens de maximale helling.

◎ **1.7.** (Labo V3) Bepaal de divergentie div $\vec{F}$ en de rotatie rot $\vec{F}$ van het vectorveld

$$\vec{F} = -xy\vec{i} + xy^2\vec{j} - 2xy^2\vec{k}$$

◎ **1.8.** (Labo V3) Bepaal de divergentie $\nabla \cdot \vec{F}$ en de rotatie $\nabla \times \vec{F}$ van het vectorveld

$$\vec{A} = 3x^2y\vec{i} + 2xy\vec{j} + x^2y^3z\vec{k}$$

◎ **1.9.** (Labo V3) Toon aan dat, voor de vectorvelden $\vec{A} = 3xy\vec{i} - x^2y\vec{j}$ en $\vec{B} = 2x^2y\vec{i} + x^2z^2\vec{k}$, geldt dat

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

◎ **1.10.** (Labo V3) Gegeven het vectorveld $\vec{F} = xz\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} - yz^2\vec{k}$, de functie $f(x, y, z) = 4x^2y^2 + yz^3$ en het punt $P(-1, 1, -1)$. Bepaal dan

$$\nabla f(P)$$
$$\nabla \cdot \vec{F}(P)$$
$$\nabla \times \vec{F}(P)$$

◎ **1.11.** (Labo V3) Gegeven het vectorveld $\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$. Toon aan dat $\operatorname{rot}\vec{A} = 0$. Bepaal een scalaire functie f zodanig dat $\operatorname{grad}(f) = \vec{A}$.

☆ **1.12.** Beschouw de functie f en het vectorveld $\vec{F}$, gegeven door

$$f(x,y,z) = \frac{yz}{1+x^2}, \qquad \vec{F} = xe^{yz}\vec{i} + ye^{zx}\vec{j} + ze^{xy}\vec{k},$$

het punt $P(1,1,-1)$ en de vector $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ in de drie-dimensionale ruimte.
Bereken de gradiënt $\operatorname{grad} f$ van de functie f in het punt P.
Bereken de divergentie $\operatorname{div}\vec{F}$ van het vectorveld $\vec{F}$ in het punt P.
Bepaal de rotatie $\operatorname{rot}\vec{F}$ van het vectorveld in het punt P.
Bereken de richtingsafgeleide van de functie f in de richting van de vector $\vec{v}$ in het punt P.

☆ **1.13.** Bereken de richtingsafgeleide van de functie $f(x,y,z) = e^{x^2-y^2+z^2}$ in de richting van de vector $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ in het punt $P(1,2,3)$.

☆ **1.14.** Beschouw de functie

$$f(x,y,z) = \frac{y^2 - z^2}{2xy},$$

het vectorveld

$$\vec{F} = y^2z^2\vec{i} + \frac{y^2 - z^2}{2yz}\vec{j} + xy^2z\vec{k},$$

en een punt $P(1,1,2)$ in de drie-dimensionale ruimte.
Bereken de gradiënt $\operatorname{grad} f$ van de functie f in het punt P.
Bereken de divergentie $\operatorname{div}\vec{F}$ van het vectorveld $\vec{F}$ in het punt P.
Bepaal de rotatie $\operatorname{rot}\vec{F}$ van het vectorveld in het punt P. Bereken de scalaire projectie van deze vector $\operatorname{rot}\vec{F}$ op de gradiënt van de functie f in het punt P.

☆ **1.15.** Beschouw het vectorveld

$$\vec{F} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k},$$

en een punt $P(1,1,1)$ in de drie-dimensionale ruimte.
Bereken de divergentie $\operatorname{div}\vec{F}$ van het vectorveld $\vec{F}$ in het punt P.
Bepaal de rotatie $\operatorname{rot}\vec{F}$ van het vectorveld in het punt P.

◎ **1.16.** (Labo V4) Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $\vec{F} = -4y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$ langs de parabool

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}$$

tussen $M(2,1)$ en $N(8,2)$.

◎ **1.17.** (Labo V4) Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $\vec{F} = -4y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$ langs de rechte lijn van $M(2,1)$ naar $N(8,2)$.

◎ **1.18.** (Labo V4) Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ langs de rechte lijn van $N(1,3)$ naar $M(2,1)$.

◎ **1.19.** (Labo V4) Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ langs de cirkelboog met middelpunt $O(0,0)$ van $Q(0,2)$ naar $P(2,0)$.

◎ **1.20.** (Labo V4) Bereken de lijnintegraal van het vectorveld $\vec{F} = x^2y\vec{i} + 2xy\vec{j} - 3xz\vec{k}$ langs de rechte lijn van $M(0,0,0)$ naar $N(2,3,-1)$.

◎ **1.21.** (Labo V4) Bereken de kringintegraal $\oint_C (2xydx + (xy - 3y)dy)$ langs het vierkant met hoekpunten $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,3)$ en $(1,3)$.

◎ **1.22.** (Labo V4) Bereken de kringintegraal $\oint_C (x^3y^2dx + (2x^2 + 1)dy)$ langs het vierkant met hoekpunten $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,3)$ en $(1,3)$.

◎ **1.23.** (Labo V4) Bereken de kringintegraal $\oint_C (x^2y^2dx + (x^2+1)dy)$ langs de gesloten kromme C, gevormd door de rechte lijn van $O(0,0)$ naar $A(2,0)$, de boog van de cirkel $x^2+y^2=4$ tussen $A(2,0)$ en $B(0,2)$ en de rechte lijn van $B(0,2)$ naar $O(0,0)$.

◎ **1.24.** (Labo V4) Bereken de kringintegraal $\oint_C (-4xy^2dx - 3x^2ydy)$ langs de gesloten kromme C, gevormd door de rechte lijn van $O(0,0)$ naar $A(2,0)$, de boog van de cirkel $x^2+y^2=4$ tussen $A(2,0)$ en $B(0,2)$ en de rechte lijn van $B(0,2)$ naar $O(0,0)$.

◎ **1.25.** (Labo V4) Zijn de volgende lijnintegralen afhankelijk van het gevolgde pad?

1. $\displaystyle\int (4x^2y^2dx - 3x^3ydy)$
2. $\displaystyle\int 6x^2\sqrt{y}dx + \frac{x^3}{\sqrt{y}}dy$
3. $\displaystyle\int \big((x-2)dx + y^2dy + 3z^3dz\big)$

◎ **1.26.** (Labo V4) Zijn de volgende vectorvelden conservatief?

1. $\vec{F} = 2xy^2\vec{i} + 3x^2\vec{j}$
2. $\vec{F} = x\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$
3. $\vec{F} = ze^{yz}\vec{j} + ye^{yz}\vec{k}$

☆ **1.27.** Beschouw het vectorveld $\vec{F} = (ye^x + e^y + 2x)\vec{i} + (e^x + xe^y + 3y^2)\vec{j}$.
Toon aan dat het vectorveld $\vec{F}$ conservatief is.
Bereken de potentiaal U van dit vectorveld.
Bereken de lijnintegraal $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ van dit vectorveld langs de kromme γ die bestaat uit het lijnstuk γ_1 van $A(0,4)$ naar $B(0,0)$ en het lijnstuk γ_2 van $B(0,0)$ naar $C(3,0)$.
Bereken de lijnintegraal $\int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ van dit vectorveld langs de boog γ_3, gevormd door de ellips $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ van $A(0,4)$ naar $C(3,0)$.

☆ **1.28.** Bereken de integraal

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_\gamma (y\sin(x+y))dx + (y\sin(x+y) - \cos(x+y))dy$$

van het vectorveld

$$\vec{F} = (y\sin(x+y))\vec{i} + (y\sin(x+y) - \cos(x+y))\vec{j}$$

langs de ellips $\vec{r}(t) = (3 + 2\cos t)\vec{i} + (5 + 3\sin t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

☆ **1.29.** Bereken de integraal

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_\gamma y dx + \frac{1}{x} dy$$

van het vectorveld $\vec{F} = y\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}$ langs de gesloten kromme γ (door de punten A,B en C) gevormd door
De rechte van $A(1,1)$ naar $B(16,1)$.
De rechte van $B(16,1)$ naar $C(16,4)$.
De parabool $y = \sqrt{x}$ van C naar A.

Oplossingen - Solutions

1.1.

$$\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j},$$
$$\vec{a}_t = \frac{104}{25}\vec{i} + \frac{78}{25}\vec{j}, \quad \vec{a}_n = -\frac{54}{25}\vec{i} + \frac{72}{25}\vec{j}$$

1.2.

$$\sqrt{3}e^2 + 3e^2$$

1.3.

$$\frac{19}{16\sqrt{13}}$$

1.4.

$$2y^3z^2\vec{i} + 6xy^2z^2\vec{j} + 4xy^3z\vec{k}$$

1.5.

$$10\vec{i} + 2\vec{j}$$

1.6.

$$4\vec{i} + 5\vec{j}, \quad 51,34^\circ, \quad \sqrt{41}$$

1.7.

$$2xy - y, \qquad -4xy\vec{i} + 2y^2\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}$$

1.8.

$$6xy + 2x + x^2y^3, \qquad 3x^2y^2z\vec{i} - 2xy^3z\vec{j} - (3x^2 - 2y)\vec{k}$$

1.9.

1.10.

$$-8\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}, \qquad O, \qquad -\vec{i} - \vec{j} - 4\vec{k}$$

1.11.

$$f = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z + C$$

1.12.

$$\begin{aligned}
\mathrm{grad}(f)(P) &= \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},\\
\mathrm{div}(F)(P) &= \frac{e^2+2}{e},\\
\mathrm{rot}(F)(P) &= -\frac{e^2+1}{e}\vec{i} + \frac{e^2+1}{e}\vec{j},\\
D_{\vec{v}}(f)(P) &= \frac{\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$

1.13.

$$-\frac{8\sqrt{35}e^6}{7}$$

1.14.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad}(f)(P) = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} - 2\vec{k},\\
&\mathrm{div}(F)(P) = \frac{9}{4},\\
&\mathrm{rot}(F)(P) = \frac{37}{8}\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k},\\
&\frac{447\sqrt{2}}{80}
\end{aligned}$$

1.15.

$$\mathrm{div}\,\vec{F}(P) = 3, \quad \mathrm{rot}\,\vec{F}(P) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

1.16.

$$\frac{-152}{3}$$

1.17.

$$-46$$

1.18.

$$9$$

1.19.

$$\frac{-32}{3}$$

1.20.

$$16$$

1.21.

$$-8$$

1.22.

$$-128$$

1.23.

$$\frac{16}{15}$$

1.24.

$$4$$

1.25.

1. ja/oui
2. neen/non
3. neen/non

1.26.

1. neen/non
2. ja/oui
3. ja/oui

1.27.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0\\
&f = ye^x + xe^y + x^2 + y^3,\\
&\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -68 + 12 = -56,\\
&\int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -56
\end{aligned}$$

1.28.

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

1.29.

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 15 + \frac{3}{16} - 43 + \frac{1}{4} = -27,5625$$