HOGERE ZEEVAARTSCHOOL ANTWERPEN

FACULTEIT WETENSCHAPPEN
VAKGROEP TOEGEPASTE EN EXACTE WETENSCHAPPEN

CALCUL VECTORIEL 2

D. AERTS, P. BUEKEN, D. LUYCKX

HZS-OE5-NW244 (suppl.) - Série 1
Deuxième année Bachelor en Sciences Nautiques
Version 14.1
19 Septembre 2015

Table des matières

Chapitre 1

Calcul vectoriel

◎ **1.1.** Considérons un objet qui se déplace le long d'une courbe α dans le plan, et dont la position au moment t est donnée par l'équation paramétrique

$$x = t^2 + 2t, \qquad y = t^3.$$

Déterminez le vecteur de vitesse $\vec{v}$ et le vecteur d'accélération $\vec{a}$ de l'objet au moment $t = 1$. Décrivez le vecteur $\vec{a}$ au moment $t = 1$ comme une somme $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$ d'un vecteur $\vec{a}_t$ tangent à la courbe et un vecteur $\vec{a}_n$ perpendiculaire à la courbe.

◎ **1.2.** (Labo V3) Déterminez la dérivée directionnelle, au point $P(2, 1)$, de la fonction $z = 2e^x y^3$ dans la direction qui forme un angle de $\theta = 30°$ avec l'axe x positif.

◎ **1.3.** (Labo V3) Déterminez la dérivée directionnelle de la fonction $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{x + 2y}$ au point $P(2, 1)$, dans la direction du vecteur $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.

◎ **1.4.** (Labo V3) Calculez le gradient de la fonction

$$f(x, y, z) = 2xy^3z^2$$

◎ **1.5.** (Labo V3) Calculez le gradient $\nabla f(P)$ de la fonction au point $P(3, 2)$

$$z = x + \frac{3x^2 + y^2}{2}$$

◎ **1.6.** (Labo V3) Déterminez, au point $P(2, 1)$, la direction dans laquelle la pente de la tangente à la surface $z = x^2 + 5y$ est maximale. Déterminez l'angle entre cette direction et l'axe x (positif). Calculez également la pente maximale.

◎ **1.7.** (Labo V3) Déterminez la divergence $\operatorname{div} \vec{F}$ et le rotationnel $\operatorname{rot} \vec{F}$ du champ vectoriel

$$\vec{F} = -xy\vec{i} + xy^2\vec{j} - 2xy^2\vec{k}$$

◎ **1.8.** (Labo V3) Calculez la divergence $\nabla \cdot \vec{F}$ et le rotationnel $\nabla \times \vec{F}$ du champ vectoriel

$$\vec{A} = 3x^2y\vec{i} + 2xy\vec{j} + x^2y^3z\vec{k}$$

◎ **1.9.** (Labo V3) Démontrez que, pour les champs vectoriels $\vec{A} = 3xy\vec{i} - x^2y\vec{j}$ et $\vec{B} = 2x^2y\vec{i} + x^2z^2\vec{k}$,

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$$

◎ **1.10.** (Labo V3) Considérons le champ vectoriel $\vec{F} = xz\vec{i} + (2x^2 - y)\vec{j} - yz^2\vec{k}$, la fonction $f(x, y, z) = 4x^2y^2 + yz^3$ et le point $P(-1, 1, -1)$. Déterminez alors

$$\nabla f(P)$$
$$\nabla \cdot \vec{F}(P)$$
$$\nabla \times \vec{F}(P)$$

◎ **1.11.** (Labo V3) Considérons le champ vectoriel $\vec{A} = (2xy + z^3)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j} + (3xz^2 - 2)\vec{k}$. Démontrez que $\operatorname{rot} \vec{A} = 0$. Construisez une fonction scalaire f telle que $\operatorname{grad}(f) = \vec{A}$.

☆ **1.12.** Considérons une fonction f et un champ vectoriel $\vec{F}$, donnés par

$$f(x, y, z) = \frac{yz}{1 + x^2}, \qquad \vec{F} = xe^{yz}\vec{i} + ye^{zx}\vec{j} + ze^{xy}\vec{k},$$

le point $P(1, 1, -1)$ et le vecteur $\vec{v} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$ dans l'espace à trois dimensions.
Calculez le gradient $\operatorname{grad} f$ de la fonction f dans le point P.
Calculez la divergence $\operatorname{div} \vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ dans le point P.
Calculez le rotationnel $\operatorname{rot} \vec{F}$ du champ vectoriel dans le point P.
Calculez la dérivée directionnelle de la fonction f dans la direction du vecteur $\vec{v}$ au point P.

☆ **1.13.** Déterminez la dérivée directionnelle de la fonction $f(x, y, z) = e^{x^2 - y^2 + z^2}$ dans la direction du vecteur $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ au point $P(1, 2, 3)$.

☆ **1.14.** Considérons la fonction

$$f(x, y, z) = \frac{y^2 - z^2}{2xy},$$

le champ vectoriel

$$\vec{F} = y^2z^2\vec{i} + \frac{y^2 - z^2}{2yz}\vec{j} + xy^2z\vec{k},$$

et un point $P(1, 1, 2)$ dans l'espace à trois dimensions.
Calculez le gradient $\operatorname{grad} f$ de la fonction f au point P.
Calculez la divergence $\operatorname{div} \vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ au point P.
Calculez le rotationnel $\operatorname{rot} \vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ au point P. Déterminez la projection scalaire de ce vecteur $\operatorname{rot} \vec{F}$ sur le gradient de la fonction f au point P.

☆ **1.15.** Considérons le champ vectoriel

$$\vec{F} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k},$$

et le point $P(1, 1, 1)$ dans l'espace à trois dimensions.
Calculez la divergence $\operatorname{div} \vec{F}$ du champ vectoriel $\vec{F}$ au point P.
Calculez le rotationnel $\operatorname{rot} \vec{F}$ du champ vectoriel au point P.

◎ **1.16.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = -4y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$ le long de la parabole

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \end{cases}$$

entre les points $M(2,1)$ et $N(8,2)$.

◎ **1.17.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ du champ vectoriel $\vec{F} = -4y^2\vec{i} + 2x\vec{j}$ le long de la ligne droite du point $M(2,1)$ au point $N(8,2)$.

◎ **1.18.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ le long de la ligne droite du point $N(1,3)$ au point $M(2,1)$.

◎ **1.19.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = y^2\vec{i} - x^2\vec{j}$ le long du cercle avec centre $O(0,0)$ du point $Q(0,2)$ au point $P(2,0)$.

◎ **1.20.** (Labo V4) Déterminez l'intégrale curviligne du champ vectoriel $\vec{F} = x^2y\vec{i} + 2xy\vec{j} - 3xz\vec{k}$ le long de la ligne droite du point $M(0,0,0)$ au point $N(2,3,-1)$.

◎ **1.21.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C (2xydx + (xy - 3y)dy)$ le long du rectangle avec sommets $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,3)$ et $(1,3)$.

◎ **1.22.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C (x^3y^2dx + (2x^2 + 1)dy)$ le long du rectangle avec sommets $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,3)$ et $(1,3)$.

◎ **1.23.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C (x^2y^2dx + (x^2+1)dy)$ le long de la courbe fermée C formée par la ligne droite de $O(0,0)$ à $A(2,0)$, la partie du cercle $x^2+y^2=4$ entre $A(2,0)$ et $B(0,2)$ et la ligne droite de $B(0,2)$ à $O(0,0)$.

◎ **1.24.** (Labo V4) Déterminez la circulation $\oint_C (-4xy^2dx - 3x^2ydy)$ le long de la courbe fermée C formée par la ligne droite de $O(0,0)$ à $A(2,0)$, la partie du cercle $x^2+y^2=4$ entre $A(2,0)$ et $B(0,2)$ et la ligne droite de $B(0,2)$ à $O(0,0)$.

◎ **1.25.** (Labo V4) Est-ce que les intégrales suivantes dépendent du chemin d'intégration suivi?

1. $\displaystyle\int (4x^2y^2dx - 3x^3ydy)$
2. $\displaystyle\int 6x^2\sqrt{y}dx + \frac{x^3}{\sqrt{y}}dy$
3. $\displaystyle\int \big((x-2)dx + y^2dy + 3z^3dz\big)$

◎ **1.26.** (Labo V4) Est-ce que les champs vectoriels suivants sont conservatifs?

1. $\vec{F} = 2xy^2\vec{i} + 3x^2\vec{j}$
2. $\vec{F} = x\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$
3. $\vec{F} = ze^{yz}\vec{j} + ye^{yz}\vec{k}$

☆ **1.27.** Considérons le champ vectoriel $\vec{F} = (ye^x + e^y + 2x)\vec{i} + (e^x + xe^y + 3y^2)\vec{j}$.
Démontrez que le champ vectoriel $\vec{F}$ est conservatif.
Déterminez le potentiel U de ce champ vectoriel.
Calculez l'intégrale curviligne $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ de ce champ vectoriel le long de la courbe γ comprenant la ligne droite γ_1 de $A(0,4)$ à $B(0,0)$ et la ligne droite γ_2 de $B(0,0)$ à $C(3,0)$.
Déterminez l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ de ce champ vectoriel le long de l'arc γ_3, formé par l'ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ de $A(0,4)$ à $C(3,0)$.

☆ **1.28.** Déterminez l'intégrale

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma (y\sin(x+y))dx + (y\sin(x+y) - \cos(x+y))dy$$

du champ vectoriel

$$\vec{F} = (y\sin(x+y))\vec{i} + (y\sin(x+y) - \cos(x+y))\vec{j}$$

le long de l'ellipse $\vec{r}(t) = (3 + 2\cos t)\vec{i} + (5 + 3\sin t)\vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$.

☆ **1.29.** Calculez l'intégrale

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma y dx + \frac{1}{x} dy$$

du champ vectoriel $\vec{F} = y\vec{i} + \frac{1}{x}\vec{j}$ le long de la courbe fermée γ (à travers les points A,B et C) formée par
Une droite du point $A(1,1)$ au point $B(16,1)$.
Une droite du point $B(16,1)$ au point $C(16,4)$.
La parabole $y = \sqrt{x}$ de C à A.

Oplossingen - Solutions

1.1.

$$\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{a} = 2\vec{i} + 6\vec{j},$$
$$\vec{a}_t = \frac{104}{25}\vec{i} + \frac{78}{25}\vec{j}, \quad \vec{a}_n = -\frac{54}{25}\vec{i} + \frac{72}{25}\vec{j}$$

1.2.

$$\sqrt{3}e^2 + 3e^2$$

1.3.

$$\frac{19}{16\sqrt{13}}$$

1.4.

$$2y^3z^2\vec{i} + 6xy^2z^2\vec{j} + 4xy^3z\vec{k}$$

1.5.

$$10\vec{i} + 2\vec{j}$$

1.6.

$$4\vec{i} + 5\vec{j}, \quad 51,34^\circ, \quad \sqrt{41}$$

1.7.

$$2xy - y, \qquad -4xy\vec{i} + 2y^2\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}$$

1.8.

$$6xy + 2x + x^2y^3, \qquad 3x^2y^2z\vec{i} - 2xy^3z\vec{j} - (3x^2 - 2y)\vec{k}$$

1.9.

1.10.

$$-8\vec{i}+7\vec{j}+3\vec{k}, \qquad O, \qquad -\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k}$$

1.11.

$$f = x^2y + xz^3 + y^2 - 2z + C$$

1.12.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad}(f)(P) = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{1}{2}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k},\\
&\mathrm{div}(F)(P) = \frac{e^2+2}{e},\\
&\mathrm{rot}(F)(P) = -\frac{e^2+1}{e}\vec{i} + \frac{e^2+1}{e}\vec{j},\\
&D_{\vec{v}}(f)(P) = \frac{\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$

1.13.

$$-\frac{8\sqrt{35}e^6}{7}$$

1.14.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{grad}(f)(P) = \frac{3}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} - 2\vec{k},\\
&\mathrm{div}(F)(P) = \frac{9}{4},\\
&\mathrm{rot}(F)(P) = \frac{37}{8}\vec{i} + 2\vec{j} - 8\vec{k},\\
&\frac{447\sqrt{2}}{80}
\end{aligned}$$

1.15.

$$\mathrm{div}\,\vec{F}(P) = 3, \quad \mathrm{rot}\,\vec{F}(P) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

1.16.

$$\frac{-152}{3}$$

1.17.

$$-46$$

1.18.

$$9$$

1.19.

$$\frac{-32}{3}$$

1.20.

$$16$$

1.21.

$$-8$$

1.22.

$$-128$$

1.23.

$$\frac{16}{15}$$

1.24.

$$4$$

1.25.

1. ja/oui
2. neen/non
3. neen/non

1.26.

1. neen/non
2. ja/oui
3. ja/oui

1.27.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0 \\
&f = ye^x + xe^y + x^2 + y^3, \\
&\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -68 + 12 = -56, \\
&\int_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -56
\end{aligned}$$

1.28.

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = 0 \Rightarrow \oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

1.29.

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 15 + \frac{3}{16} - 43 + \frac{1}{4} = -27,5625$$